ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL RÉDIGÉ PAR

G. MITTAG-LEFFLER

18

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1894.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
MARKGRAFENSTRASSE 51.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

REDACTION

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 18. — 1894. — TOME 18.

SUR LES INVARIANTS DIFFÉRENTIELS DES GROUPES CONTINUS DE TRANSFORMATIONS

PAR

AR. TRESSE.

Introduction.

La notion d'*invariant différentiel* est une de celles qui se présentent le plus souvent dans les différentes branches de l'Analyse. On sait, par exemple, combien est féconde, dans la Géométrie des courbes et surfaces, la théorie de la *courbure*, c'est-à-dire des invariants différentiels des courbes et surfaces par rapport au groupe des mouvements de l'espace; comment la *courbure totale* de GAUSS, combinée avec les *paramètres différentiels* de BELTRAMI, intervient heureusement dans la théorie des surfaces applicables.

De nos jours, HALPHEN a déterminé les invariants des courbes, planes[1] et gauches[2], par rapport aux transformations projectives; et c'est en généralisant ces résultats que, reprenant les recherches de LAGUERRE[3] et BRIOSCHI[4], il est arrivé, dans son mémoire célèbre[5], à construire les invariants des équations différentielles linéaires par rapport aux transformations ponctuelles qui n'altèrent pas leur forme linéaire.

---

[1] HALPHEN, Thèse, *Sur les invariants différentiels,* Paris, 1878.

[2] *Sur les invariants différentiels des courbes gauches,* Journal de l'école polytechnique, 47me Cahier.

[3] LAGUERRE, Comptes rendus, t. 88, p. 116 et 224.

[4] BRIOSCHI, Bulletin de la société mathématique de France, t. VII, p. 105.

[5] HALPHEN, *Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables,* Mémoires des savants étrangers, t. 28.

La théorie des équations différentielles a encore fourni d'intéressantes applications des invariants différentiels à MM. APPELL et RIVEREAU[1], sur la transformation des équations de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + \ldots + b_p y^p}$$

par la transformation

$$x' = X(x), \qquad y' = yX_1(x) + X_2(x)$$

ou sur des cas particuliers de ce problème; à M. ROGER LIOUVILLE[2], sur la transformation ponctuelle de l'équation:

$$y'' + a_1 y'^3 + 3a_2 y'^2 + 3a_3 y' + a_4 = 0.$$

Dans toutes ces recherches s'est présenté ce résultat que les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux équations données puissent se ramener l'une à l'autre à l'aide d'une transformation de nature déterminée, s'obtiennent par la considération d'un nombre fini d'invariants différentiels.

L'objet de ce travail est de généraliser ce principe. J'ai fait, dans ce but, application de la théorie des groupes de M. LIE, laquelle se prête admirablement à l'édification d'une théorie générale des invariants différentiels. C'est ce qu'a commencé M. LIE lui-même, dans plusieurs recherches où il avait principalement en vue la détermination de ces invariants[3]; c'est aussi ce qu'ont indiqué dans deux notes, assez brèves, mais fondamentales, HALPHEN[4] et M. GOURSAT[5].

---

[1] APPELL, *Sur les invariants de quelques équations différentielles,* Journal de math., 4[me] série, t. 5.

RIVEREAU, *Sur les invariants de certaines classes d'équations homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées,* Thèse, Paris 1890. — *Sur les invariants de quelques équations différentielles,* Journal de math., 4[me] série, t. 8.

[2] ROGER LIOUVILLE, *Sur les invariants de certaines équations différentielles,* Journal de l'école polytechnique, 59[me] cahier.

[3] Voir, entre autres, LIE, *Über Differentialinvarianten,* Math. Annalen, t. 24.

[4] HALPHEN, *Sur l'existence des invariants,* Lettre à M. SYLVESTER, American journal of mathematics, vol. 9, p. 137. — Voir, à ce sujet, LIE, *Die Begriffe Gruppe und Invariante,* Leipziger Berichte, 1887.

[5] GOURSAT, *Sur les invariants des équations différentielles,* C. R., t. 107, p. 898.

M. Lie a établi comment, en général, il existe des invariants dont le nombre croit indéfiniment avec l'ordre. J'ai démontré qu'il existe, dans chaque cas, des procédés, *paramètres différentiels* ou *opérations invariantes,* permettant, étant connus des invariants, d'en déduire de nouveaux; et que, étant déterminé un nombre fini d'invariants, on peut, par ces procédés, obtenir tous les autres. Il en résulte que les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux multiplicités de même nature puissent se ramener l'une à l'autre par une transformation du groupe, sont définies par un nombre encore limité de ces invariants.

Ce travail est divisé en trois parties. Dans la première, j'établis une proposition, fondamentale pour la suite, savoir, que l'étude d'un système d'équations aux dérivées partielles se réduit toujours à celle d'un nombre fini d'équations; puis, je rappelle les propositions générales de M. Lie, sur les groupes définis par des systèmes d'équations aux derivées partielles, groupes que j'appelle *groupes de Lie.*

Dans la seconde partie, je montre comment les invariants d'une multiplicité se déduisent immédiatement des *équations de définition* du groupe, et je rappelle comment M. Lie, partant des *transformations infinitésimales*, obtient ces invariants par l'intégration de systèmes complets. Puis j'établis les propositions concernant les systèmes finis d'invariants.

Enfin, dans la troisième partie, je montre comment la notion d'invariant différentiel s'identifie avec celle de *forme réduite,* celle-ci pouvant même guider le calcul des invariants. Je termine par la détermination des invariants d'une surface, par rapport aux transformations conformes de l'espace, d'une part, et aux transformations projectives, d'autre part; puis, par celle des invariants déjà obtenus par une voie toute différente par M. Roger Liouville dans le problème qu'il a traité.

J'ai entrepris ces recherches sur les conseils de mon très illustre maître, M. Sophus Lie, qui m'a initié à ses théories si fécondes et aujourd'hui si vastes des groupes de transformations. Qu'il me soit permis de lui en exprimer ici ma plus vive reconnaissance!

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

Propriété générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

1. On appelle *multiplicité à n dimensions d'un espace à n + p dimensions* un système de p fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si une telle multiplicité satisfait à une ou plusieurs équations aux dérivées partielles, entre les x, les z et leurs dérivées, elle satisfait aussi aux équations qui s'en déduisent par différentiation. En s'élevant aux ordres supérieurs, on obtient de la sorte un nombre illimité d'équations; si on ne considère pas celles-ci comme distinctes des premières, il y a lieu de se demander s'il peut exister des systèmes comprenant un nombre illimité d'équations ainsi distinctes, et s'il peut exister des multiplicités définies comme solutions de pareils *systèmes illimités* d'équations.

Nous verrons qu'il n'en est rien. Par exemple, on sait[1] que la condition nécessaire et suffisante pour que la solution générale d'un système d'équations aux dérivées partielles ne dépende que d'un nombre fini de constantes arbitraires, est que l'on puisse à l'aide de ces équations exprimer toutes les dérivées d'un certain ordre des z, en fonction des dérivées d'ordre inférieur, des x et des z. Un pareil système est nécessairement limité.

2. Considérons d'abord le cas simple d'une seule fonction z de deux variables, x et y, définie par un système donné d'équations aux dérivées

---

[1] Voir, LIE, *Theorie der Transformationsgruppen,* Erster Abschnitt, p. 179.
BOURLET, *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées,* Annales de l'école normale, 1891, Suppl.

partielles. Considérons les équations d'ordre h de ce système, et mettons-les sous une *forme canonique,* en les résolvant par rapport à une ou plusieurs dérivées d'ordre h,

$$z_{\alpha,h-\alpha} = \frac{\partial^h z}{\partial x^\alpha \partial y^{h-\alpha}} = \psi_{h,\alpha}$$

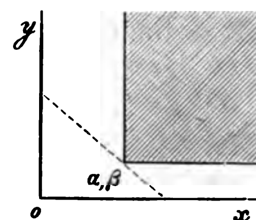
de telle façon que la fonction $\psi_{h,\alpha}$ ne contienne que des dérivées d'ordre h, $z_{\alpha',h-\alpha'}$ telles que l'on ait

$$\alpha' < \alpha.$$

Une pareille réduction est toujours possible. De plus, les équations d'ordre supérieur, qu'on en déduit par différentiation, se présentent encore sous forme canonique.

Représentons alors dans un plan, la dérivée $z_{\alpha,\beta}$ par le point de coordonnées α, β: les dérivées d'un même ordre sont situées sur une droite:

$$x + y = \text{const.}$$



La présence, dans le *système canonique,* d'une équation résolue par rapport à $z_{\alpha,\beta}$, entraîne, pour les systèmes d'ordre supérieur, celle d'équations résolues par rapport à toutes les derivées, dont les points représentatifs sont situés dans l'angle formé par les parallèles aux axes menées par le point α, β, ou sur ces parallèles. Si donc il y a des équations résolues par rapport à une ou plusieurs dérivées d'ordre h:

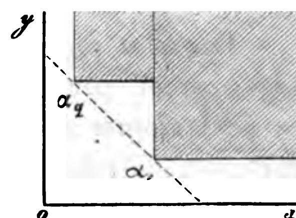
(1) $$z_{\alpha_1, h-\alpha_1}, \; z_{\alpha_2, h-\alpha_2}, \; \ldots, \; z_{\alpha_q, h-\alpha_q}$$

avec

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_q,$$

on aura, à partir d'un certain ordre, des équations résolues par rapport à toutes les dérivées de z, $z_{\alpha,\beta}$, excepté pour

$$\alpha < \alpha_q \quad \text{ou} \quad \beta < h - \alpha_1;$$



il peut même se présenter plusieurs équations résolues par rapport à une même dérivée $z_{\alpha,\beta}$; il nous suffit de ne conserver qu'une seule d'entre

elles, celle, par exemple, qui s'obtient en différentiant la dérivée d'indice α le plus élevé, parmi les dérivées (1).

Le nombre des dérivées qui ne figurent pas dans les premiers membres, pour un ordre déterminé, est alors constant quel que soit cet ordre, et égal à $h - \alpha_1 + \alpha_q$. Si alors le système n'est pas limité, c'est qu'il y a lieu d'ajouter des équations nouvelles, lesquelles, combinées avec les précédentes, peuvent se mettre encore sous forme canonique. Or, après $h - \alpha_1 + \alpha_q$ équations nouvelles, au plus, on trouve un ordre s, tel que toutes les dérivées d'ordre s et d'ordre supérieur de z s'expriment en fonction des dérivées d'ordre inférieur. Le système est alors ***nécessairement limité,*** et toute équation nouvelle, ajoutée aux précédentes, se ramène à une équation d'ordre inférieur à s, laquelle peut être ou n'être pas analytiquement indépendante des premières. Dans tous les cas, le système est donc limité.

3. La proposition subsiste dans le cas d'une multiplicité, que j'appellerai *de deuxième espèce,* formée de p fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ dépendant chacune de *deux* variables indépendantes, x_1, y_1, pour z_1, x_2, y_2 pour $z_2, \ldots, x_p, y_p$ pour z_p: ces variables peuvent d'ailleurs ne pas être toutes différentes. Ici, on dressera encore une liste des dérivées d'ordre h, en rangeant d'abord celles de z_1, $z_{1,\alpha\beta}$ $\left(z_{1,\alpha\beta} = \frac{\partial^{\alpha+\beta} z_1}{\partial x_1^\alpha \partial y_1^\beta}\right)$ suivant les indices α décroissants, puis celles de z_2, de la même manière, et ainsi de suite. En suivant cette liste, on peut mettre les équations d'un même ordre h, que comprend le système, sous une *forme canonique,* c'est-à-dire, en les résolvant par rapport aux dérivées d'ordre h:

$$z_{i,\alpha,h-\alpha} = \psi_{i,\alpha,h-\alpha}$$

de telle façon que les dérivées d'ordre h, qui figurent dans $\psi_{i,\alpha,h-\alpha}$ suivent $z_{i,\alpha,h-\alpha}$ dans la liste. Cette forme a encore la propriété manifeste de rester canonique après différentiation.

Dans les premiers membres de ces équations figurent par leurs dérivées une ou plusieurs fonctions z. D'après le paragraphe précédent, on ne peut ajouter qu'un nombre fini d'équations nouvelles, résolues par rapport aux dérivées de ces fonctions. Si donc le système n'est pas limité, on fera apparaître, après un nombre fini d'additions d'équations nouvelles,

une on plusieurs fonctions nouvelles z, et ainsi de suite. Finalement, on aura dans les premiers membres, toutes les fonctions z, après quoi, en ajoutant encore un nombre fini d'équations nouvelles, on arriverait à exprimer toutes les dérivées d'un certain ordre en fonction des dérivées d'ordre inférieur. Sous cette forme, le système est alors nécessairement *limité*.

4. Pour généraliser la proposition, je la supposerai établie pour toute multiplicité de $n - 1^{\text{ième}}$ espèce, et l'étendrai à celles de $n^{\text{ième}}$ espèce.

Soit, celle-ci, formée de p fonctions, $z_1, z_2, \ldots, z_p$, chacune de n variables indépendantes, z_i, par exemple, étant fonction de $x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,n}$. On posera

$$z_{i,a_1,a_2,\ldots,a_n} = \frac{\partial^{a_1+a_2+\ldots+a_n} z_i}{\partial x_{i,1}^{a_1}\, \partial x_{i,2}^{a_2}\, \ldots\, \partial x_{i,n}^{a_n}},$$

Comme dans les cas précédents, on dressera une liste des dérivées d'un même ordre, en rangeant les dérivées de z_1, $z_{1,a_1,a_2,\ldots,a_n}$ suivant les indices α_1 décroissants, celles ayant même indice α_1, suivant les indices α_2 décroissants, et ainsi de suite, et de même pour les fonctions suivantes $z_2, \ldots, z_p$. D'après cette liste, il est encore possible de mettre les équations d'ordre h sous une forme canonique se conservant par différentiation:

$$(2) \qquad z_{i,a_1,a_2,\ldots,a_n} = \psi_{i,a_1,a_2,\ldots,a_n}, \qquad (a_1+a_2+\ldots+a_n=h)$$

les dérivées d'ordre h qui figurent dans $\psi_{i,a_1,a_2,\ldots,a_n}$ suivant $z_{i,a_1,a_2,\ldots,a_n}$ sur la liste.

Cela fait, supposons que la fonction z_i figure dans l'un des premiers membres de ces équations, par sa dérivée $z_{i,a_1,a_2,\ldots,a_n}$. Dans les équations d'ordre supérieur, on a, par le fait, des équations résolues par rapport à toutes les dérivées de $z_{i,a_1,a_2,\ldots,a_n}$. Nous considérons l'ensemble des autres dérivées de z_i, d'ordre h et d'ordre supérieur, comme appartenant à une multiplicité de $n - 1^{\text{ième}}$ espèce, définie comme il suit. Prenons comme fonctions les dérivées de z_i, d'ordre h, distinctes de $z_{i,a_1,a_2,\ldots,a_n}$; et soit $z_{i,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n}$ l'une quelconque d'entre elles: l'un au moins des indices β est inférieur à l'indice α correspondant, car on a:

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

elles, celle, par exemple, qui s'obtient en différentiant la dérivée d'indice α le plus élevé, parmi les dérivées (1).

Le nombre des dérivées qui ne figurent pas dans les premiers membres, pour un ordre déterminé, est alors constant quel que soit cet ordre, et égal à $h - \alpha_1 + \alpha_q$. Si alors le système n'est pas limité, c'est qu'il y a lieu d'ajouter des équations nouvelles, lesquelles, combinées avec les précédentes, peuvent se mettre encore sous forme canonique. Or, après $h - \alpha_1 + \alpha_q$ équations nouvelles, au plus, on trouve un ordre s, tel que toutes les dérivées d'ordre s et d'ordre supérieur de z s'expriment en fonction des dérivées d'ordre inférieur. Le système est alors *nécessairement limité,* et toute équation nouvelle, ajoutée aux précédentes, se ramène à une équation d'ordre inférieur à s, laquelle peut être ou n'être pas analytiquement indépendante des premières. Dans tous les cas, le système est donc limité.

3. La proposition subsiste dans le cas d'une multiplicité, que j'appellerai *de deuxième espèce,* formée de p fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ dépendant chacune de *deux* variables indépendantes, x_1, y_1, pour z_1, x_2, y_2 pour $z_2, \ldots, x_p, y_p$ pour z_p: ces variables peuvent d'ailleurs ne pas être toutes différentes. Ici, on dressera encore une liste des dérivées d'ordre h, en rangeant d'abord celles de z_1, $z_{1,\alpha\beta}\left(z_{1,\alpha\beta} = \frac{\partial^{\alpha+\beta} z_1}{\partial x_1^\alpha \partial y_1^\beta}\right)$ suivant les indices α décroissants, puis celles de z_2, de la même manière, et ainsi de suite. En suivant cette liste, on peut mettre les équations d'un même ordre h, que comprend le système, sous une *forme canonique,* c'est-à-dire, en les résolvant par rapport aux dérivées d'ordre h:

$$z_{i,\alpha,h-\alpha} = \psi_{i,\alpha,h-\alpha}$$

de telle façon que les dérivées d'ordre h, qui figurent dans $\psi_{i,\alpha,h-\alpha}$ suivent $z_{i,\alpha,h-\alpha}$ dans la liste. Cette forme a encore la propriété manifeste de rester canonique après différentiation.

Dans les premiers membres de ces équations figurent par leurs dérivées une ou plusieurs fonctions z. D'après le paragraphe précédent, on ne peut ajouter qu'un nombre fini d'équations nouvelles, résolues par rapport aux dérivées de ces fonctions. Si donc le système n'est pas lim[illegible] on fera apparaître, après un nombre fini d'additions d'équations nouv[illegible]

une ou plusieurs fonctions ... Finalement on aura dans les premiers ... z, après quoi, en ajoutant encore un nombre fi... on arriverait à exprimer toutes les dérivées ... fonction des dérivées d'ordre inférieur. Sous cette ... est alors nécessairement *limité*.

4. Pour généraliser ... établie pour toute multiplicité de $n - 1^{ième}$ ... de $n^{ième}$ espèce.

Soit, celle-ci, formée ... z_p, chacune de n variables indépendantes, z_1 par ... de $x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots$

On posera

Comme dans les cas précédents, ... des dérivées du même ordre, en rangeant ... suivant les indices α_1 décroissants, celles ayant ... les indices ... croissants, et ainsi de ... fonctions ... $z_2, \ldots, z_p$. D'après cette ... tions d'ordre h sous une forme ... par different...

(2)

les dérivées d'ordre h ... la liste.

Cela fait, supposons que ... membres de ces équations ... d'ordre supérieur, on a, que ... toutes les dérivées de z ...



Si, $\beta_n < \alpha_n$, on considère seulement les dérivées de $z_{i,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n}$ prises par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, et non à x_n. Parmi les autres $z_{i,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n}$ on prend celles pour lesquelles on a: $\beta_{n-1} < \alpha_{n-1}$, et on considère toutes leurs dérivées, sauf celles prises par rapport à x_{n-1}, et ainsi de suite. De cette façon, on fait entrer toutes les dérivées de z_i, d'ordre égal ou supérieur à h, qui ne sont pas dérivées de $z_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$, dans une multiplicité de $n - 1^{\text{ième}}$ espèce, car une telle dérivée a l'un au moins de ses indices inférieur au nombre correspondant de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. De plus, cette multiplicité de $n - 1^{\text{ième}}$ espèce ne comprend aucune dérivée de $z_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$.

On fera ainsi pour toutes celles des fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ qui figurent dans les premiers membres du système (2). Or, d'après ce qui a été admis sur les multiplicités de $n - 1^{\text{ième}}$ espèce, on ne peut ajouter qu'un nombre fini d'équations nouvelles résolues par rapport aux dérivées de ces fonctions, ainsi mises à part: il en est même certaines qui s'introduisent nécessairement, celles qui expriment que deux des dérivées de la multiplicité de $n - 1^{\text{ième}}$ espèce sont identiques. Si donc le système n'est pas limité, on fera apparaître, dans les premiers membres, après un nombre fini d'additions d'équations, une ou plusieurs nouvelles fonctions z, et ainsi de suite. Finalement, on arriverait encore à un système nécessairement *limité,* permettant d'exprimer toutes les dérivées d'un certain ordre en fonction des dérivées d'ordre inférieur. Donc:

Théorème I. *Un système d'équations aux dérivées partielles étant défini d'une manière quelconque, ce système est nécessairement limité, c'est-à-dire qu'il existe un ordre fini s, tel que, toutes les équations d'ordre supérieur à s que comprend le système, se déduisent par de simples différentiations des équations d'ordre égal ou inférieur à s.*

5. La méthode suivie dans cette analyse conduit à d'autres résultats. En différentiant les équations d'un système canonique, on a négligé ce fait qu'une même dérivée peut, dans certains cas, s'exprimer de plusieurs manières différentes, pour n'envisager qu'une seule de ces expressions. Si on exprime que ces différentes valeurs doivent être égales, on forme ainsi des équations, qui, si elles ne sont pas des conséquences analytiques de celles déjà connues, appartiennent à la catégorie des équations nouvelles qu'il faut ajouter au système.

Dans le cas où ce procédé n'ajoute pas d'équations nouvelles, on dit, ou que *les conditions d'intégrabilité sont satisfaites,* ou que le système est *complètement intégrable,* ou qu'il est *en involution.*

D'après cela, étant donné un système quelconque de ρ équations aux dérivées partielles, on peut, selon la marche suivie, le mettre sous forme canonique, puis différentier ses équations, et exprimer, s'il y a lieu, les conditions d'intégrabilité. Nos raisonnements montrent que, en suivant cette voie, on arrive, après un *nombre limité d'opérations,* ou à un *système complètement intégrable,* ou à un système définissant toutes les dérivées d'un certain ordre s, en fonction des dérivées d'ordre inférieur. Si on différentie ces équations d'ordre s, puis qu'on écrive les conditions d'intégrabilité relatives aux dérivées d'ordre $s + 1$, ou bien on trouve qu'elles sont des conséquences analytiques des équations d'ordre égal ou inférieur à s, ou bien on obtient de nouvelles équations d'ordre s ou inférieur. Dans ce cas, on ajoute ces équations au système proposé, et on répète les mêmes opérations. Finalement, les dérivées d'ordre au plus égal à s étant en nombre fini, on arrive, après un *nombre limité d'opérations,* ou à un système incompatible, ou à un système complètement intégrable, dont la solution généralene dépend alors que d'un nombre fini de constantes arbitraires. Donc:

Théorème II. *Etant donné un système quelconque d'équations aux dérivées partielles, on peut, après un nombre limité de différentiations et d'éliminations, ou bien montrer qu'il est incompatible, ou bien le mettre sous forme d'un système complètement intégrable, dont la solution générale dépend alors, suivant les cas, de fonctions ou de constantes arbitraires.*

6. L'existence des solutions de ces systèmes complètement intégrables, dans toute leur généralité, a fait l'objet de plusieurs travaux remarquables, particulièrement de MM. MERAY et RIQUIER[1] et BOURLET[2], qui ont continué les savantes recherches de CAUCHY, de M. DARBOUX[3] et de Mme DE KOWALEVSKI[4]. Le développement de ces travaux n'a pas place ici; j'en

---

[1] MERAY et RIQUIER, Annales de l'école normale supérieure, 1890.

[2] BOURLET, loc. cit.

[3] G. DARBOUX, Comptes rendus de l'académie des sciences, t. 80, p. 101 et 317.

[4] SOPHIE VON KOWALEVSKI, Journal de Crelle, t. 80.

retiendrai seulement, pour l'utilité de ce qui suivra, ce fait que la solution générale d'un système complètement intégrable dépend de fonctions ou de constantes arbitraires. Je remarquerai de plus, ce qui est encore un résultat des travaux que je viens de citer[1], que les équations d'un système complètement intégrable permettent de former les développements en séries des solutions; les coefficients de ces séries, c'est-à-dire les valeurs que prennent, pour un système donné $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$, de valeurs des variables indépendantes, les fonctions z et leurs dérivées, sont assujettis seulement à satisfaire aux équations du système, de telle sorte qu'un certain nombre d'entre eux peuvent être choisis *arbitrairement,* sous certaines conditions de convergence seulement.

CHAPITRE II.

Les groupes de Lie.

1. Je rappelle d'abord quelques définitions[2]. Etant données n variables, ou coordonnées d'un point d'un espace R_n à n dimensions, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, considérons n autres variables $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, définies en fonction des premières par les équations:

$$(1) \qquad x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

Si inversement, on peut résoudre ces équations par rapport aux x en fonction des x', on dit qu'elles représentent une *transformation,* substituant les x' aux x. Une transformation peut être considérée, soit comme un simple *changement de variables,* soit comme une transformation ponctuelle de l'espace R_n en un autre espace R'_n. Ainsi, les équations:

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \qquad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

---

[1] Bourlet, loc. cit., p. 52. (Suppl.)

[2] Sophus Lie, *Theorie der Transformationsgruppen,* Erster Abschnitt, Einleitung.

représentent, soit un changement de coordonnées rectangulaires, soit une rotation du plan autour de l'origine.

Etant défini un ensemble de transformations, on dit qu'il constitue un *groupe de transformations,* si la succession de deux d'entre elles, effectuées l'une après l'autre, constitue encore une transformation de l'ensemble.

Nous supposerons toujours, avec M. Lie, que toute transformation (1) d'un groupe vérifie un système d'équations aux dérivées partielles entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$, d'une part, $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ considérées comme fonctions des variables précédentes et leurs dérivées, d'autre part, et que, réciproquement, toute solution d'un pareil système définit une transformation du groupe. Nous supposerons en outre que ce système n'est formé que *d'équations analytiques* par rapport à tous les arguments, variables, fonctions et dérivées qui y figurent, et qu'il est *irréductible.* J'appellerai *groupe de Lie,* un groupe ainsi défini; il est *fini* ou *infini,* suivant que sa transformation générale dépend de *constantes* ou de *fonctions* arbitraires; il est *continu,* c'est-à-dire, que l'on peut passer de l'une quelconque de ses transformations à une autre par une variation continue de ces arbitraires.

2. Quant au système d'équations qui définit les transformations du groupe (1), je supposerai toujours qu'il est mis sous forme *complètement intégrable,* opération que l'on sait effectuer; alors, si le système est d'ordre N, toute équation d'ordre inférieur ou égal à N, que l'on pourrait déduire de ce système par des différentiations, suivies de l'élimination des dérivées d'ordre supérieur à N, est nécessairement une *conséquence analytique* des équations de ce système; en outre, toute équation d'ordre supérieur à N, satisfaite par toutes les solutions de ce système, se déduit nécessairement par différentiation des équations de ce système. Soit, ce système, formé de ρ équations:

$$(2) \qquad W_h(x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n, \ldots, x'_{i,a_1,a_2,\ldots,a_n}, \ldots) = 0 \qquad (h=1,2,\ldots,\rho)$$

en posant:

$$x'_{i,a_1,a_2,\ldots,a_n} = \frac{\partial^{a_1+a_2+\ldots+a_n} x'_i}{\partial x_{x_1}^{a_1} \partial x_{x_2}^{a_2} \ldots \partial x_{x_n}^{a_n}}.$$

Il comprend μ_0 équations distinctes d'ordre *zéro,* μ_1 équations distinctes d'ordre *un*, ..., μ_N équations distinctes d'ordre N, c'est-à-dire que, des μ_K équations d'ordre K, par exemple, on ne peut pas déduire d'équations d'ordre inférieur par élimination des dérivées d'ordre K; ces μ_K équations comprennent d'ailleurs celles qu'on obtient en différentiant les équations d'ordre $K - 1$. On a:

$$\rho = \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_N$$

et le groupe est *fini,* si μ_N est égal au nombre des dérivées d'ordre N, *infini,* s'il lui est inférieur.

On pourra d'ailleurs, suivant les cas, supposer le système (2) *prolongé* jusqu'à un ordre Q supérieur à N en, lui adjoignant les μ_{N+1} équations distinctes d'ordre $N+1$, μ_{N+2} d'ordre $N+2, \ldots, \mu_Q$ d'ordre Q, qui se déduisent des μ_N équations d'ordre N, par $1, 2, \ldots, Q-N$ dérivations successives. Quand nous parlerons des équations du système (2), d'ordre au plus égal à K, ce nombre K pourra être quelconque, inférieur, égal, ou supérieur à N; et il faudra entendre par là l'ensemble des μ_0 équations d'ordre $0, \mu_1$ d'ordre $1, \ldots, \mu_K$ d'ordre K, qui viennent d'être formées.

Ces équations peuvent prendre une autre forme qui nous sera utile dans la suite. Les μ_0 équations d'ordre zéro n'entraînent pas de relation entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seulement, de sorte qu'elles permettent d'exprimer un certain nombre des fonctions $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, en fonction des autres et de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; plus généralement, elles permettent d'exprimer $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et de ε_0 paramètres, $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0$, que j'appellerai *paramètres d'ordre zéro:*

$$(A_0) \qquad x'_h = \varphi_h(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0). \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,n)}$$

Ensuite, les μ_1 équations du premier ordre donnent certaines des dérivées du premier ordre en fonction des autres, de $x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$; ou mieux, elles donnent les dérivées du premier ordre, en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0$, et de ε_1 paramètres nouveaux $\lambda_1^1, \lambda_2^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1$, dits *paramètres du premier ordre:*

$$(A_1) \quad \frac{\partial x'_h}{\partial x_i} = \varphi_{h,0,0,\ldots,1,\ldots,0}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \lambda_2^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1).$$

Et ainsi de suite, jusqu'à un ordre quelconque K, les dérivées d'ordre K s'exprimant en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, des ε_0 paramètres d'ordre *zéro,* ε_1 d'ordre *un*, ..., et de ε_K *paramètres d'ordre* K, $\lambda_1^K, \lambda_2^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}^K$:

$$(A_K) \qquad x'_{h,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \varphi_{h,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1, \ldots, \lambda_1^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}^K). \quad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,n) \; (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=K)}$$

L'ensemble des équations $(A_0), (A_1), \ldots, (A_K)$ est équivalent au système (2) pris jusqu'à l'ordre K.

Dans les fonctions φ qui figurent dans ces équations, les paramètres λ sont *essentiels,* c'est-à-dire qu'il n'existe pas de fonctions des λ et de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, en *nombre inférieur* à $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_K$, telles que les φ puissent s'exprimer à l'aide des x et de ces fonctions seulement. Il en résulte que les équations (A_0) peuvent être résolues par rapport à $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0$, les équations (A_1), par rapport à $\lambda_1^1, \lambda_2^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1$, et ainsi de suite, pour tout système de valeurs des x' satisfaisant aux équations (2).

Notons en outre qu'on peut toujours trouver au moins une solution des équations (2), représentée par des fonctions $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, qui prennent, ainsi que leurs dérivées, dans le voisinage d'un point quelconque:

$$x_1 = x_{10}, \qquad x_2 = x_{20}, \quad \ldots, \quad x_n = x_{n0}$$

des valeurs définies par les formules (A), où l'on donne aux λ des *valeurs arbitraires,* et aux x, les valeurs $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$.

3. Cela posé, soit T une transformation déterminée, mais quelconque, du groupe:

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)}$$

et effectuons sur les x' le changement de fonctions défini par la transformation T:

$$(3) \qquad \bar{x}'_i = f_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n).$$

Les $\bar{x}'$, fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et leurs dérivées, s'expriment en fonction des x' et de leurs dérivées, et réciproquement, les équations (3) étant résolubles par rapport à $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$. Le système (2) se change ainsi en un système:

$$(2') \qquad \overline{W}_h(x_1, x_2, \ldots, x_n, \bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \ldots, \bar{x}'_n, \ldots, \bar{x}'_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}, \ldots) = 0$$

et les équations (A) se transforment en des équations (A'):

$$(A'_0) \qquad \bar{x}'_h = \bar{\varphi}_h(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(A'_K) \quad \bar{x}'_{h,a_1,a_2,\ldots,a_n} = \bar{\varphi}_{h,a_1,a_2,\ldots,a_n}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1, \ldots, \lambda_1^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}^K)$$

où les paramètres λ sont encore *essentiels* dans les fonction $\bar{\varphi}$, car si leur nombre pouvait s'abaisser, il en serait de même, en revenant aux fonctions initiales x', pour les fonctions φ.

Toute solution de (2') se déduit d'une solution de (2) par la transformation (3), de sorte que, si

$$(4) \qquad x'_i = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

est la solution générale de (2), celle de (2') est:

$$(5) \qquad \bar{x}'_i = f_i(F_1, F_2, \ldots, F_n) = G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Or, ceci représente la transformation obtenue par la succession des transformations (4), puis (5), toutes deux appartenant au groupe. Par suite, toute solution de (2') satisfait aussi aux équations:

$$(2'') \qquad W_h(x_1, x_2, \ldots, x_n, \bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \ldots, \bar{x}'_n, \ldots, \bar{x}'_{i,a_1,a_2,\ldots,a_n}, \ldots) = 0,$$

système qui peut se mettre sous la forme:

$$(A''_0) \qquad \bar{x}'_h = \varphi_h(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1'^0, \lambda_2'^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}'^0)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(A''_K) \quad \bar{x}'_{h,a_1,a_2,\ldots,a_n} = \varphi_{h,a_1,a_2,\ldots a_n}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1'^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}'^0, \lambda_1'^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}'^1, \ldots, \lambda_1'^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}'^K)$$

où figurent $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_K$ *paramètres essentiels* nouveaux $\lambda_1'^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}'^0$, $\lambda_1'^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}'^1, \ldots, \lambda_1'^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}'^K$. A tout système de valeurs attribuées aux x et aux λ dans les équations (A') correspond donc, dans les équations (A'') un système de valeurs des x et des λ', qui rend les seconds membres de (A'') égaux respectivement à ceux de (A'):

$$(6) \qquad \bar{\varphi}_{h,a_1,a_2,\ldots,a_n}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \ldots, \lambda_1^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}^K)$$
$$= \varphi_{h,a_1,a_1,\ldots,a_n}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1'^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}'^0, \ldots, \lambda_1'^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}'^K),$$

les x ayant mêmes valeurs dans les deux systèmes.

Ces équations (6) peuvent donc être résolues par rapport aux λ' et sont compatibles. Elles donnent pour les différents ordres successifs:

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
\lambda_i'^0 &= L_i^0(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0), && (i=1,2,\ldots,\varepsilon_0)\\
\lambda_i'^1 &= L_i^1(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1) && (i=1,2,\ldots,\varepsilon_1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\lambda_i'^K &= L_i^K(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^0 \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1, \ldots, \lambda_1^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}^K) && (i=1,2,\ldots,\varepsilon_K)
\end{aligned}
$$

où les fonctions L_i^K ne dépendent que des paramètres λ, d'ordre au plus égal à K. Inversement on peut résoudre ces équations (7) par rapport aux λ; car, s'il en était autrement, elles entraîneraient au moins une relation de la forme:

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1'^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}'^0, \ldots, \lambda_1'^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}'^K) = 0,$$

laquelle serait ainsi conséquence des équations (6). Alors, en substituant dans les fonctions $\bar{\varphi}$ les paramètres λ' aux paramètres λ, on pourrait, dans ces fonctions $\bar{\varphi}$, abaisser le nombre des paramètres en vertu de la relation précédente; et ceci est impossible, puisque les λ sont *essentiels* dans les fonctions $\bar{\varphi}$.

Les formules (7) établissent ainsi l'identité des systèmes (A') et (A''), ou encore l'équivalence des systèmes (2′) et (2″). Donc:

Théorème I. *Les équations de définition des transformations d'un groupe de Lie restent invariantes lorsqu'on effectue sur les x', un changement de fonctions défini par une transformation quelconque du groupe.*

4. Par une marche parallèle, on pourrait résoudre les μ_0 équations d'ordre zéro par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, car elles ne peuvent entraîner de relation entre les fonctions $x_1', x_2', \ldots, x_n'$, toute transformation ayant nécessairement une inverse. On formerait ainsi un système analogue au système (A). En effectuant alors sur les variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la transformation *inverse* de T:

$$x_i = f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$$

le système (2) se changerait en un système équivalent au suivant:

$$W_h(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots, x'_{i,a_1,a_2,\ldots,a_n}, \ldots) = 0$$

où les dérivées $x'_{i,a_1,a_2,\ldots,a_n}$ sont prises par rapport aux variables $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$. Donc:

Théorème II. *Les mêmes équations restent invariantes, par un changement de variables indépendantes, défini par une transformation inverse d'une transformation quelconque du groupe.*

5. Il se déduit de là de nouvelles conséquences. Les systèmes (2) et (2') ont mêmes solutions, et en particulier, la suivante:

$$\bar{x}'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

correspondant à la transformation T. On peut donc dans (4), disposer des fonctions F, c'est-à-dire trouver une transformation S du groupe, de façon que les relations (5) deviennent:

$$\bar{x}'_i = f_i(F_1, F_2 \ldots, F_n) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Ceci exige:

$$F_i = x_i,$$

ce qui fait apparaître, parmi les transformations du groupe, la *transformation identique*. Ensuite, puisqu'il en est ainsi, on peut déterminer S de façon que l'on ait:

$$\bar{x}'_i = f_i(F_1, F_2, \ldots, F_n) = x_i.$$

Ceci exige que les fonctions F satisfassent aux identités:

$$f_i(F_1, F_2, \ldots, F_n) = x_i$$

et alors la transformation S donne:

$$x_i = f_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n).$$

c'est-à-dire, qu'elle est *inverse de T*, transformation arbitraire du groupe. Donc:[1]

Théorème III. *Tout groupe de Lie contient la transformation identique et ses transformations sont deux à deux inverses.*

Ceci permet d'établir la réciproque des Théorèmes I et II. Soit, en effet, T, une transformation, qui effectuée sur les fonctions x':

$$\bar{x}'_i = f_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$$

laisse invariant le système (2). Ce système (2) étant satisfait pour la transformation identique:

$$x'_i = x_i$$

aura donc aussi pour solution:

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

c'est-à-dire que le groupe contient la transformation T. En opérant de même pour le changement de variables indépendantes, on voit finalement que:

Théorème IV. *Un groupe de Lie étant défini par le système d'équations aux dérivées partielles, complètement intégrable:*

$$(2) \qquad W_h(x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots, x'_{i,a_1,a_2,\ldots,a_n}, \ldots) = 0 \quad (h=1,2,\ldots,p)$$

la condition nécessaire et suffisante pour que ce groupe contienne une transformation T, est que cette dernière, effectuée, soit sur les variables indépendantes x, soit sur les fonctions x', laisse invariant le système (2).

---

[1] Je dois cette démonstration de cette proposition à l'obligeance de M. ENGEL, qui a bien voulu me la communiquer. Je répète d'ailleurs que tous les résultats de ce chapitre sont dus à M. LIE, qui les a exposés en particulier dans le mémoire suivant: *Die Grundlagen für die Theorie der unendlichen continuirlichen Transformationsgruppen,* Leipziger Berichte, 1891.

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

Invariants et équations invariantes.[1]

1. Etant donnée, dans un espace R_r à $r = n + p$ dimensions, une multiplicité M, à n dimensions, définie par p fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ de n variables indépendantes $y_1, y_2, \ldots, y_n$, je me propose d'étudier les relations qui existent entre M et les multiplicités qui s'en déduisent lorsqu'on effectue sur l'espace R_r les transformations d'un groupe de Lie, multiplicités que j'appellerai *homologues de M* par rapport à ce groupe.

Les x étant les coordonnées d'un point quelconque de R_r, et les x' celles d'un point de l'espace transformé R'_r, les équations de définition du groupe définissent les x' en fonction des x: il peut d'ailleurs se faire que les transformations du groupe portent seulement sur un nombre moindre m de coordonnées, les $r - m$ autres n'étant pas transformées: cela revient à considérer un groupe à m variables, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ comme s'étendant à $r - m$ variables de plus, $x_{m+1}, \ldots, x_r$; il suffit d'ajouter à ses équations de définition les suivantes:

$$x'_{m+1} = x_{m+1}, \quad \ldots, \quad x'_r = x_r$$

et celles qui s'en déduisent par dérivation.

La multiplicité M est donnée par l'expression de p des coordonnées, savoir:

$$z_1 = x_{n+1}, \quad z_2 = x_{n+2}, \quad \ldots, \quad z_p = x_r$$

en fonction des $n = r - p$ autres:

$$(1) \qquad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad \ldots, \quad y_n = x_n.$$

[1] Ces deux termes ont ici le sens des expressions souvent employées de *invariants absolus*, et *invariants relatifs*.

Alors, en transformant R_r en R'_r, p coordonnées, $z'_1, z'_2, \ldots, z'_p$ sont fonctions des n autres $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$, et représentent la multiplicité transformée M':

$$(2)\qquad \begin{aligned} z'_1 &= x'_{n+1}, & z'_2 &= x'_{n+2}, & \ldots, \quad z'_p &= x'_r, \\ y'_1 &= x'_1, & y'_2 &= x'_2, & \ldots, \quad y'_r &= x'_r. \end{aligned}$$

Comme nous l'avons déjà fait, nous classons les équations du groupe suivant l'ordre, et nous les considérons jusqu'à un ordre quelconque K:

$$(3)\qquad W_h(x_1, \ldots, x_r, x'_1, \ldots, x'_r, \ldots, x'_{i,a_1,a_2,\ldots,a_r}, \ldots) = 0 \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,p)\quad (a_1+a_2+\ldots+a_r \leq K)}$$

ou encore, en les prenant sous forme paramétrique:

$$(A_0)\qquad x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_r, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0). \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,r)}$$

. . . .

$$(A_{K-1})\qquad x'_{i,a_1,a_2,\ldots,a_r} = \varphi_{i,a_1,a_2,\ldots,a_r}(x_1, \ldots, x_r, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1, \ldots, \lambda_1^{K-1}, \ldots, \lambda_{\varepsilon_{K-1}}^{K-1}) \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,r)\quad (a_1+a_2+\ldots+a_r=K-1)}$$

$$(A_K)\qquad x'_{i,a_1,a_2,\ldots,a_r} = \varphi_{i,a_1,a_2,\ldots,a_r}(x_1, \ldots, x_r, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \ldots, \lambda_1^{K-1}, \ldots, \lambda_{\varepsilon_{K-1}}^{K-1}, \lambda_1^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}^K). \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,r)\quad (a_1+a_2+\ldots+a_r=K)}$$

Je ferai remarquer que, pour chaque ordre K, le nombre ε_K des paramètres $\lambda_1^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}^K$ dépend seulement du nombre m des coordonnées $x_1, \ldots, x_m$ les seules transformées, et reste le même quel que soit le nombre $r - m$ des autres.

Cela posé, si, dans les équations (2), on remplace les x' par une solution quelconque de (3), on obtient:

$$(4)\qquad \begin{aligned} y'_1 &= f_1(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p), & \ldots, \quad y'_n &= f_n(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p) \\ z'_1 &= f_{n+1}(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p), & \ldots, \quad z'_p &= f_r(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p). \end{aligned}$$

Ces relations représentent un changement simultané de variables et de fonctions, qui met la multiplicité M sous la forme M'. Or, c'est un résultat bien connu de la théorie du changement de variables que les dérivées des z' par rapport aux y' peuvent s'exprimer en fonction des dérivées des z par rapport aux y, et des dérivées des fonctions f; et que de plus, les dérivées d'un ordre quelconque K des z', s'expriment

en fonction des dérivées d'ordre K et d'ordre inférieur des z et des f. Ceci tombe en défaut dans le cas seulement où la transformation est telle qu'il y ait une relation identique entre $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$, ce qui se produit lorsque le déterminant des expressions:

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\partial f_i}{\partial z_\mu} \cdot \frac{\partial z_\mu}{\partial y_i} \qquad {\scriptstyle (i,j=1,2,\dots,n)}$$

où les f ont les valeurs (4), est identiquement nul. Ceci n'a évidemment lieu que pour des multiplicités déduites de M par des transformations particulières, n'ayant pas lieu dans le cas de M elle-même. Je laisserai de côté, pour l'instant, ces multiplicités particulières.

Alors, si l'on désigne par $z_1^K, z_2^K, \dots, z_{\rho_K}^K$ les ρ_K dérivées d'ordre K des z par rapport aux y, et par $z_1'^K, z_2'^K, \dots, z_{\rho_K}'^K$ les dérivées correspondantes des z'; puis, si l'on remarque que les dérivées partielles des fonctions f ne sont autre chose que celles des x' par rapport aux x, lesquelles satisfont aux équations (3), on aura les relations suivantes, données par l'opération du changement de variables et de fonctions (4):

$$(B_1) \qquad z_i'^1 = \psi_i^1(z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1, \dots, x'_{j,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r}, \dots) \quad {\scriptstyle (\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_r=1) \quad (i=1,2,\dots,\rho_1)}$$

. . . .

$$(B_K) \qquad z_i'^K = \psi_i^K(z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1, \dots, z_1^K, \dots, z_{\rho_K}^K, \dots, x'_{j,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r}, \dots) \quad {\scriptstyle (\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_r \leq K) \quad (i=1,2,\dots\rho_K)}$$

Ces formules deviennent, en remplacant les $x'_{j,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r}$ par les valeurs quelles ont en vertu des relations (A), et par une extension de la notation, suivant laquelle $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_p$ sont représentés par $z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0$ $(\rho_0 = n + p = r)$:

$$(C_1) \quad z_i'^1 = \varpi_i^1(z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1, \lambda_1^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \dots, \lambda_{\varepsilon_1}^1) \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\dots,\rho_1)}$$

. . . .

$$(C_K) \quad z_i'^K = \varpi_i^K(z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, \dots, z_1^K, \dots, z_{\rho_K}^K, \lambda_1^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \dots, \lambda_1^K, \dots, \lambda_{\varepsilon_K}^K); \quad {\scriptstyle (i=1,2,\dots,\rho_K)}$$

nous leur adjoindrons les suivantes, qui ne sont autres que les relations (A_0) avec une notation différente:

$$(C_0) \qquad z_i'^0 = \varpi_i^0(z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}^0). \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\dots,\rho_0)}$$

Cela fait, supposons que l'on puisse éliminer les λ entre ces relations (C): en général, on pourra toujours choisir, le groupe étant donné, l'espace R_r et la multiplicité M, de telle façon qu'il en soit ainsi, car le nombre des paramètres λ étant fixé, il suffit pour cela de prendre le nombre $r - m$ des variables $x_{m+1}, \ldots, x_r$ suffisamment grand.

Le résultat de cette élimination dépend de la multiplicité M, les z et leurs dérivées étant des fonctions données de $y_1, y_2, \ldots, y_n$; il dépend de l'ordre le plus élevé des déterminants fonctionnels des seconds membres des équations (C) par rapport aux λ, qui ne sont pas identiquement nuls, quels que soient ces λ. Je supposerai d'abord que la *multiplicité initiale* M soit la *plus générale,* à n dimensions, de l'espace R_r, c'est-à-dire, qu'elle ne satisfait à aucune équation aux dérivées partielles donnée a priori: en particulier, si, dans les équations $(C_0), (C_1), \ldots, (C_K)$, l'ordre des déterminants fonctionnels considérés, qui ne sont par identiquement nuls pour toutes les valeurs des arguments $z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0, \ldots, z_1^K, \ldots, z_{\rho_K}^K$, est égal à s_K, ces déterminants d'ordre s_K ne s'annulent pas, lorsqu'on y remplace les z et leurs dérivées par leurs valeurs en fonction de $y_1, \ldots, y_n$, définies par la multiplicité M. En d'autres termes, M est telle que l'on puisse résoudre les équations $(C_0), (C_1), \ldots, (C_K)$ par rapport au plus grand nombre possible de paramètres $\lambda^0, \lambda^1, \ldots, \lambda^K$.

Dans ces conditions, l'élimination se fait par voie progressive. D'abord on élimine, si c'est possible, les λ^0 entre les équations (C_0), puis les λ^0 et λ^1 entre les équations (C_0) et (C_1), ce qui reproduit en particulier les équations obtenues dans l'élimination précédente, et ainsi de suite. Le résultat se présente sous forme d'équations résolues par rapport à certaines des quantités $z'^0, z'^1, \ldots, z'^K$, ($z_1'^0, \ldots, z_{\mu_0}'^0$, par exemple, pour l'ordre zéro, $z_1'^1, \ldots, z_{\mu_1}'^1$, pour le premier ordre, $\ldots, z_1'^K, \ldots, z_{\mu_K}'^K$ pour l'ordre K) en fonction des autres $z'^0, z'^1, \ldots, z'^K$ et des $z^0, z^1, \ldots, z^K$:

$$(D_0) \qquad z_i'^0 = G_i^0(z_{\mu_0+1}'^0, \ldots, z_{\rho_0}'^0, z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0) \qquad (i=1,2,\ldots,\mu_0)$$

$$(D_1) \qquad z_i'^1 = G_i^1(z_{\mu_0+1}'^0, \ldots, z_{\rho_0}'^0, z_{\mu_1+1}'^1, \ldots, z_{\rho_1}'^1, z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0, z_1^1, \ldots, z_{\rho_1}^1) \qquad (i=1,2,\ldots,\mu_1)$$

. . . .

$$(D_K) \qquad z_i'^K = G_i^K(z_{\mu_0+1}'^0, \ldots, z_{\rho_0}'^0, \ldots, z_{\mu_K+1}'^K, \ldots, z_{\rho_K}'^K, z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0, \ldots, z_1^K, \ldots, z_{\rho_K}^K) \qquad (i=1,2,\ldots,\mu_K)$$

chaque fonction G_i^K ne dépendant que de dérivées d'ordre égal ou inférieur à K.

Il est à remarquer que ce même résultat aurait pu être directement obtenu sous la même forme, sans passer par l'intermédiaire des équations (A) et (C), par l'élimination directe des dérivées des x', $x'_{j,a_1,a_2,\ldots,a_r}$ entre les équations (B) et les équations de définition (3), classées suivant les ordres $0, 1, \ldots, K$.

Inversement, si M' est *homologue* de M, toute relation différentielle d'ordre K entre M' et M est une conséquence des équations (D_0), (D_1), $\ldots$, (D_K), si elle a lieu quelle que soit cette multiplicité homologue M'.

Soit, en effet, cette relation:

$$J(z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0, \ldots, z_1^K, \ldots, z_{\rho_K}^K, z_1'^0, \ldots, z_{\rho_0}'^0, \ldots, z_1'^K, \ldots, z_{\rho_K}'^K) = 0.$$

A tout élément particulier de M, représenté par les valeurs numériques de ses coordonnées, correspond un élément de M', dont les valeurs numériques sont données par les équations (C), où les λ, avons-nous vu, ont des *valeurs arbitraires*. Ces deux systèmes de coordonnées de M et de M', satisfont, quels que soient les λ, à la relation $J = 0$. Celle-ci est donc une conséquence des équations (C), ou encore, puiqu'elle est indépendante des λ, des équations (D), qui se déduisent des (C) par l'élimination des λ.

2. Ces équations (D) jouissent de propriétés remarquables. D'abord, M pouvant être à elle-même son homologue par la transformation identique, elles sont identiquement satisfaites, quand on y fait, pour toutes les valeurs des indices i et K:

$$z_i'^K = z_i^K.$$

Considérons ensuite deux multiplicités homologues de M, quelconques, M' et M''. D'après la propriété de groupe, M' est aussi homologue de M''. On verra plus loin que si l'on substitue M'' à M dans les équations (C), l'élimination des λ se fait de la même manière. On peut donc établir entre M'' et M' les mêmes relations qu'entre M et M', savoir:

$$z_i'^h = G_i^h(z_{\mu_0+1}'^0, \ldots, z_{\rho_0}'^0, \ldots, z_{\mu_h+1}'^h, \ldots, z_{\rho_h}'^h, z_1''^0, \ldots, z_{\rho_0}''^0, \ldots, z_1''^h, \ldots, z_{\rho_h}''^h).$$
$$(h = 0, 1, 2, \ldots, K) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu_h)$$

Celles-ci, comparées aux équations (D), donnent:

$$(5) \qquad \begin{aligned} &G_i^h(z_{\mu_0+1}'^0, \ldots, z_{\rho_0}'^0, \ldots, z_{\mu_h+1}'^h, \ldots, z_{\rho_h}'^h, z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0, \ldots, z_1^h, \ldots, z_{\rho_h}^h) \\ &= G_i^h(z_{\mu_0+1}'^0, \ldots, z_{\rho_0}'^0, \ldots, z_{\mu_h+1}'^h, \ldots, z_{\rho_h}'^h, z_1''^0, \ldots, z_{\rho_0}''^0, \ldots, z_1''^h, \ldots, z_{\rho_h}''^h). \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} h = 0, 1, \ldots, K \\ i = 1, 2, \ldots, \mu_h \end{pmatrix}$$

Cela étant, considérons les valeurs numériques de trois éléments correspondants de M, M' et M'': elles satisfont à ces relations (5). Celles de M et M'' étant choisies, on peut prendre, pour celles de M', les valeurs fournies par les formules (C), où l'on attribue aux λ des valeurs arbitraires: cela revient à dire qu'on peut choisir arbitrairement les valeurs de $z'^0_{\mu_0+1}, \ldots, z'^0_{\rho_0}, z'^1_{\mu_1+1}, \ldots, z'^1_{\rho_1}, \ldots, z'^K_{\mu_K+1}, \ldots, z'^K_{\rho_K}$, les autres coordonnées étant alors données par les formules (D). Les relations (5), considérées comme ayant lieu entre deux éléments correspondants de M et M'', ont donc lieu quelles que soient les valeurs des z'^h_i qui y figurent: c'est dire qu'elles sont indépendantes de ces quantités. Par conséquent si l'on pose:

$$Z^h_i(z^0_1, \ldots, z^0_{\rho_0}, \ldots, z^h_1, \ldots, z^h_{\rho_h})$$
$$= G^h_i(c^0_{\mu_0+1}, \ldots, c^0_{\rho_0}, \ldots, c^h_{\mu_h+1}, \ldots, c^h_{\rho_h}, z^0_1, \ldots, z^0_{\rho_0}, \ldots, z^h_1, \ldots, z^h_{\rho_h})$$

où les c sont des constantes arbitraires[1], les équations (5) se réduisent à:

$$Z^h_i(z^0_1, \ldots, z^0_{\rho_0}, \ldots, z^h_1, \ldots, z^h_{\rho_h}) = Z^h_i(z''^0_1, \ldots, z''^0_{\rho_0}, \ldots, z''^h_1, \ldots, z''^h_{\rho_h}).$$
$$(h=0,1,\ldots,K) \qquad (i=1,2,\ldots,\mu_h)$$

Elles ont lieu quelle que soit la multiplicité M'', homologue de M, de sorte qu'on a aussi, entre M et M':

$$(E_0) \qquad Z^0_i(z^0_1, \ldots, z^0_{\rho_0}) = Z^0_i(z'^0_1, \ldots, z'^0_{\rho_0}) \qquad (i=1,2,\ldots,\mu_0)$$

$$(E_1) \qquad Z^1_i(z^0_1, \ldots, z^0_{\rho_0}, z^1_1, \ldots, z^1_{\rho_1}) = Z^1_i(z'^0_1, \ldots, z'^0_{\rho_0}, z'^1_1, \ldots, z'^1_{\rho_1}) \qquad (i=1,2,\ldots,\mu_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(E_K) \qquad Z^K_i(z^0_1, \ldots, z^0_{\rho_0}, \ldots, z^K_1, \ldots, z^K_{\rho_K}) = Z^K_i(z'^0_1, \ldots, z'^0_{\rho_0}, \ldots, z'^K_1, \ldots, z'^K_{\rho_K}). \qquad (i=1,2,\ldots,\mu_K)$$

Les fonctions Z, d'après leur définition, se réduisent respectivement à $z^0_1, \ldots, z^0_{\mu_0}, z^1_1, \ldots, z^1_{\mu_1}, \ldots, z^K_1, \ldots, z^K_{\mu_K}$, lorsqu'on y fait

$$z^0_{\mu_0+1} = c^0_{\mu_0+1}, \quad \ldots, \quad z^0_{\rho_0} = c^0_{\rho_0}, \quad \ldots, \quad z^K_{\rho_K} = c^K_{\rho_K}.$$

Il en résulte que les équations (E) sont indépendantes. Elles doivent en outre être des conséquences des équations (D); et par suite, elles forment un système équivalent au système (D).

---

[1] Les valeurs des constantes c sont asujetties seulement à laisser holomorphes les fonctions G.

Ces fonctions Z sont appelées *invariants de la multiplicité M, relatifs au groupe de transformations* considéré.

Je dis que, de plus, tout invariant d'ordre K, $H(z_1^0,\ldots,z_{\rho_0}^0,\ldots,z_1^K,\ldots,z_{\rho_K}^K)$ est une fonction des invariants $Z_1^0,\ldots,Z_{\mu_0}^0,\ldots,Z_1^K,\ldots,Z_{\mu_K}^K$, d'ordre K ou d'ordre inférieur qui viennent d'être obtenus.

En effet, d'après la définition de H, on aura, quelles que soient les deux multiplicités M et M' se déduisant l'une de l'autre par une transformation du groupe:

$$H(z_1^0,\ldots,z_{\rho_0}^0,\ldots,z_1^K,\ldots,z_{\rho_K}^K) = H(z_1'^0,\ldots,z_{\rho_0}'^0\ldots,z_1'^K,\ldots,z_{\rho_K}'^K)$$

et cette relation, d'ordre K, sera nécessairement une conséquence des équations $(D_0), (D_1), \ldots, (D_K)$, ou encore, des équations $(E_0), (E_1), \ldots, (E_K)$. En résolvant ces dernières par rapport aux quantités z', pour les porter dans $H(z_1'^0,\ldots,z_{\rho_0}'^0,\ldots,z_1'^K,\ldots,z_{\rho_K}'^K)$, il faudra donc que les z' disparaissent, ce qui exige bien que H soit une fonction de $Z_1^0,\ldots,Z_{\mu_0}^0,\ldots,Z_1^K,\ldots,Z_{\mu_K}^K$.

De là cette proposition:

Théorème I. *Lorsqu'une multiplicité M, soumise aux transformations d'un groupe de Lie, admet des invariants, ceux d'un ordre quelconque K ou d'ordre inférieur sont fonctions d'un nombre limité d'entre eux; et ces derniers peuvent se déduire, à l'aide de différentiations et d'éliminations seulement, des équations de définition du groupe.*

Toute relation différentielle d'ordre K existant entre M et toute multiplicité homologue M', est une conséquence des relations obtenues en égalant entre eux les invariants distincts d'ordre K et d'ordre inférieur, de M et de M'.

3. *Equations invariantes.* Dans ce qui précède, on a supposé que M était une *multiplicité générale,* de telle façon que l'on pouvait résoudre les équations $(C_0), (C_1), \ldots, (C_K)$ par rapport au plus grand nombre possible de paramètres $\lambda^0, \lambda^1, \ldots, \lambda^K$. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que ce nombre s'abaisse s'expriment par des relations obtenues en annulant identiquement, quels que soient les λ, les déterminants fonctionnels d'un certain ordre des seconds membres des équations (C_0), $(C_1), \ldots, (C_K)$ par rapport aux λ. On obtient ainsi un système d'équations, ou, plus généralement, plusieurs systèmes distincts, les conditions cherchées étant que M satisfasse à l'un quelconque d'entre eux.

Soit donc, l'un de ces systèmes:

$$(6) \qquad J_i(z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0, z_1^1, \ldots, z_{\rho_1}^1, \ldots, z_1^K, \ldots, z_{\rho_K}^K) = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,\sigma_K)$$

et supposons que la multiplicité initiale satisfasse à ce système: j'appelle alors M, *multiplicité particulière,* et je dis que toute multiplicité M', transformée de M, satisfait au même système (6), qui pourra être appelé *système d'équations invariantes* par rapport au groupe de transformations.

En effet, remarquons d'abord que l'élimination des λ entre les équations $(C_0), (C_1), \ldots, (C_K)$ donne dans cette hypothèse entre M et M', certaines relations différentielles dont le nombre est supérieur à celui que l'on obtient dans le cas général, et n'est pas nul. Ces relations sont d'ailleurs indépendantes, et se présentent sous la même forme que les équations (D): appelons-les $(\Delta_0), (\Delta_1), \ldots, (\Delta_K)$.

Cela étant, considérons une troisième multiplicité M'', homologue de M et cherchons les relations qui existent entre M' et M''. Soient x_1, $x_2, \ldots, x_r$ les coordonnées d'un point de M, $x_1', x_2', \ldots, x_r'$ celles d'un point de M' et $x_1'', \ldots, x_r''$, celles d'un point de M''. Nous regarderons M'' comme une représentation analytique nouvelle de la multiplicité M, obtenue en faisant le changement de variables indépendantes et de fonctions:

$$x_i'' = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_r) \qquad (i=1,2,\ldots,r)$$

défini par la transformation qui fait passer de M à M''. On sait (1ère partie, ch. II) qu'on peut lui associer un changement de paramètres:

$$\lambda_i''^h = L_i^h(x_1, \ldots, x_r, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{s_0}^0, \ldots, \lambda_1^h, \ldots, \lambda_{s_h}^h) \qquad \binom{h=1,2,\ldots,K}{i=1,2,\ldots,s_h}$$

de telle façon que les équations qui se déduisent des (A) en substituant comme coordonnées les x'' aux x, s'obtiennent simplement, en remplaçant dans (A) les x et λ par les x'' et λ'' correspondants. Elles deviennent ainsi:

$$(A'') \qquad \frac{\partial^h x_i'}{\partial x_1''^{a_1} \ldots \partial x_r''^{a_r}} = \varphi_{i,a_1,\ldots,a_r}(x_1'', \ldots, x_r'', \lambda_1''^0, \ldots, \lambda_{s_0}''^0, \ldots, \lambda_1''^h, \ldots, \lambda_{s_h}''^h).$$
$$(h=1,2,\ldots,K) \qquad (i=1,2,\ldots,r) \qquad (a_1+a_2+\ldots+a_r=h)$$

D'autre part, le changement de variables et de fonctions qui met M sous

la forme M'', donne les relations suivantes, analogues des (B) et ayant nécessairement même forme:

$$(B'') \quad z_i'^h = \psi_i^h \Big(z_1'', \ldots, z_{\rho_1}'', \ldots, \underset{(h=1,\ldots,K)}{z_1''^h}, \ldots, \underset{(i=1,2,\ldots,\rho_K)}{z_{\rho_h}''^h}, \ldots, \frac{\partial^h x_j'}{\partial x_1''^{\alpha_1} \ldots \partial x_n''^{\alpha_r}}, \ldots \Big)$$

de telle sorte que M' se rattache à M'' par les relations suivantes (C'') qui ont encore même forme que (C):

$$(C'') \quad z_i'^h = \varpi_i^h (z_1''^0, \ldots, z_{\rho_0}''^0, \ldots, \underset{(h=0,1,\ldots,K)}{z_1''^h}, \ldots, \underset{(i=1,2,\ldots,\rho_h)}{z_{\rho_h}''^h}, \lambda_1''^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}''^0, \ldots, \lambda_1''^h, \ldots, \lambda_{\varepsilon_h}''^h).$$

Les relations entre M' et M'', s'obtiendraient en éliminant les λ'' entre ces équations C''. Or, entre M et M', on a, jusqu'à l'ordre K, les relations indépendantes (Δ_0), (Δ_1), ..., (Δ_K); si, dans ces dernières on remplace les éléments de M, par leurs valeurs, sous la forme M'', elles deviennent des relations entre M' et M'', (Δ_0''), (Δ_1''), ..., (Δ_K''), qui restent indépendantes, étant toujours résolues par rapport aux mêmes quantités $z_i'^K$. L'élimination des λ entre (C_0''), (C_1''), ..., (C_K'') entraîne donc les relations indépendantes (Δ_0''), (Δ_1''), ..., (Δ_K''), et par suite, (M'') est telle que les équations (C'') ne sont pas résolubles par rapport au nombre maximum de paramètres λ'', sans quoi, il ne pourrait exister entre M' et M'' qu'un nombre moindre de relations indépendantes.

Cette conclusion subsistant, quelle que soit M'', homologue de M, il faut donc que le système (6) ou l'un des systèmes analogues soit satisfait par M'', indépendamment des arbitraires dont dépend celle-ci; et ce fait ne peut avoir lieu que pour le système (6) lui-même, le seul qui soit satisfait quand on prend pour M'', la multiplicité M elle-même, qui correspond à la transformation identique. En particulier, on voit bien que deux multiplicités homologues, sont ou *générales,* ou *particulières,* en même temps, résultat auquel nous avons fait appel précédemment (§ 2, page 22).

4. L'étude des multiplicités satisfaisant à un *système invariant d'équations* se fera de la même manière que celle des multiplicités générales. Les coordonnées des éléments de pareilles multiplicités satisfont au système (6), et, pour les ordres supérieurs, aux équations qui s'en déduisent par dérivation. Ces coordonnées s'expriment donc en fonction d'un certain

nombre d'entre elles, ou de certains paramètres, pris comme nouvelles coordonnées. On peut ainsi transformer les équations (B) et (C) de façon à n'y laisser figurer que ces nouvelles coordonnées. De là une seconde classification de ces multiplicités, en *multiplicités générales* qui ne satisfont à aucune équation nouvelle donnée a priori, et en *multiplicités particulières.* Pour les premières, l'élimination des λ entre les équations (C) donne, s'il y a lieu, des relations, analogues aux équations (E) entre des *invariants* des deux multiplicités; les secondes sont définies par des *systèmes d'équations invariantes* entre les coordonnées d'une même multiplicité; et ainsi de suite. Ces divisions et subdivisions ne peuvent d'ailleurs pas se prolonger indéfiniment: on ne peut concevoir, en effet, qu'il y ait un nombre illimité de relations entre les coordonnées d'ordre K ou d'ordre inférieur, ces coordonnées étant en nombre fini.

Cette classification effectuée, on est en mesure d'établir toutes les équations aux dérivées partielles d'un ordre quelconque K et d'ordre inférieur auxquelles satisfont les multiplicités M', transformées d'une multiplicité initiale, M, donnée. D'abord, ces équations comprennent toutes les *équations invariantes* auxquelles satisfait M. Quant aux autres, elles sont satisfaites pour toutes les valeurs des quantités $z'^0, z'^1, \ldots, z'^K$ données par les formules (C); elles sont donc des conséquences des équations (E) (ou des équations analogues, quand M n'est pas une multiplicité générale). Dans ces équations (E), les quantités $z^0, z^1, \ldots, z^K$ qui y figurent sont des fonctions données des r variables indépendantes $y_1, y_2, \ldots, y_r$. L'élimination de ces dernières, si elle est possible, donnera enfin des relations de la forme suivante, auxquelles satisfont les multiplicités M':

$$\Phi(Z_1^0, \ldots, Z_{\mu_0}^0, Z_1^1, \ldots, Z_{\mu_1}^1, \ldots, Z_1^K, \ldots, Z_{\mu_K}^K) = 0$$

où les Z sont pris en fonction des quantités $z'^0, z'^1, \ldots, z'^K$.

On obtient ainsi toutes les équations cherchées, d'où la proposition suivante qui complète la précédente:

Théorème II. *Etant donnée une multiplicité M, que l'on soumet à toutes les transformations d'un groupe de Lie, les multiplicités homologues M' satisfont à des équations aux dérivées partielles qui sont de deux sortes. Ces équations s'obtiennent en exprimant pour les unes, que M' satisfait aux mêmes*

systèmes d'équations invariantes que M, pour les autres, que les invariants de M' sont liés par les mêmes relations que ceux de M.

Ces équations invariantes et ces invariants se déduisent d'ailleurs par de simples différentiations et éliminations des équations de définition du groupe.

5. **Remarque**. Nous avons exclu de notre analyse, parmi les multiplicités M', transformées de M, celles pour lesquelles $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ sont liées entre elles par une relation, et ne peuvent plus être prises comme variables indépendantes. Il est bien évident par raison de continuité, que les invariants absolus et les équations invariantes ne cessent pas d'avoir un sens dans ce cas.

En effet, les quantités $y'_1, \ldots, y'_n, z'_1, \ldots, z'_p$, fonctions de $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p$ ne cessent pas de représenter une multiplicité à n dimensions, sans quoi, en repassant de M' à M par la transformation inverse, on trouverait que M a moins de n dimensions distinctes. Il est donc possible de prendre comme variables indépendantes, dans M', n quantités distinctes parmi $y'_1, \ldots, y'_n, z'_1, \ldots, z'_p$. Alors toute expression différentielle où $y'_1, \ldots, y'_n$ sont les variables indépendantes se transforme en une expression nouvelle ayant un sens bien défini. Les invariants et équations invariantes subsistent encore avec ces nouvelles variables, et, en particulier dans le cas des multiplicités M' qui avaient été précédemment exclues.

Par exemple, considérons, dans le plan, le groupe des rotations autour de l'origine. Une courbe définie par une fonction z, de y, admet pour invariant

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}\left(y\frac{dz}{dy}-z\right)$$

qui représente la distance à l'origine de la tangente au point y, z. Notre analyse tombe en défaut, lorsque la courbe en y, z se transforme en une courbe en y', z', pour laquelle on aurait $y' = \text{const.}$ Mais, en prenant z pour variable indépendante, l'invariant considéré devient:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}}\left(y-z\frac{dy}{dz}\right)$$

expression qui pour la courbe $y' =$ const. se réduit à y'. On a donc, entre la courbe en y, z, et cette courbe particulière qui est une de ses transformées, la relation:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}\left(y\frac{dz}{dy} - z\right) = y'.$$

6. **Exemple.** Considérons le groupe des mouvements dans un plan, dont la transformation générale est:

$$x_1' = a + x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha,$$

$$x_2' = b + x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha$$

où a, b, α sont des constantes arbitraires. Les équations de définition (A) sont ici:

$$x_1' = \lambda_1, \qquad x_2' = \lambda_2,$$

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_1} = \cos\alpha, \qquad \frac{\partial x_1'}{\partial x_2} = -\sin\alpha, \qquad \frac{\partial x_2'}{\partial x_1} = \sin\alpha, \qquad \frac{\partial x_2'}{\partial x_2} = \cos\alpha$$

les dérivées d'ordre supérieur étant toutes nulles, λ_1, λ_2 et α étant trois paramètres arbitraires.

Effectuons ces transformations sur une courbe définie par une fonction z de y; la courbe transformée sera définie par une fonction z' de y' en posant:

$$y = x_1, \qquad z = x_2,$$

$$y' = x_1', \qquad z' = x_2'$$

et on a:

$$\frac{dz'}{dy'} = \frac{\frac{\partial x_2'}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2'}{\partial x_2}\frac{dz}{dy}}{\frac{\partial x_1'}{\partial x_1} + \frac{\partial x_1'}{\partial x_2}\frac{dz}{dy}}.$$

En tenant compte immédiatement des équations de définition, ceci donne, comme équations (C):

$$(C_1) \qquad \frac{dz'}{dy'} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha\frac{dz}{dy}}{\cos\alpha - \sin\alpha\frac{dz}{dy}}$$

et, pour le second ordre:

$$(C_2)\qquad \frac{d^2z'}{dy'^2} = \frac{\left(\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\frac{\partial x_2'}{\partial x_2} - \frac{\partial x_2'}{\partial x_1}\frac{\partial x_1'}{\partial x_2}\right)\frac{d^2z}{dy^2}}{\left(\frac{\partial x_1'}{\partial x_1} + \frac{\partial x_1'}{\partial x_2}\frac{dz}{dy}\right)^3} = \frac{\frac{d^2z}{dy^2}}{\left(\cos\alpha - \sin\alpha\frac{dz}{dy}\right)^3}.$$

La première équation donne:

$$\frac{\cos\alpha - \sin\alpha\frac{dz}{dy}}{1} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha\frac{dz}{dy}}{\frac{dz'}{dy'}} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 + \left(\frac{dz'}{dy'}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

de sorte que l'élimination de α donne:

$$(D_2)\qquad \frac{d^2z'}{dy'^2} = \frac{d^2z}{dy^2}\cdot\frac{\left(1 + \left(\frac{dz'}{dy'}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

équation qui se met sous la forme:

$$(E_2)\qquad \left(1 + \left(\frac{dz'}{dy'}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{d^2z'}{dy'^2} = \left(1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{d^2z}{dy^2}$$

où l'on voit apparaître l'invariant bien connu, donné par la *courbure* de la courbe.

Le calcul tombe en défaut dans le cas où (C_1) n'est plus résoluble par rapport à α, c'est-à-dire, lorsque on a:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{dz'}{dy'}\right) = \left[\left(\cos\alpha - \sin\alpha\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\sin\alpha + \cos\alpha\frac{dz}{dy}\right)^2\right]\frac{1}{\left(\cos\alpha - \sin\alpha\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

$$= \frac{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}{\left(\cos\alpha - \sin\alpha\frac{dz}{dy}\right)^2} = 0.$$

L'équation $1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = 0$ est une *équation invariante,* qui entraîne bien $1 + \left(\frac{dz'}{dy'}\right)^2 = 0$: elle représente les deux systèmes de *droites isotropes* qui jouent donc le rôle de *courbes particulières* par rapport aux transformations considérées.

7. **Application.** Reprenons les équations de définition d'un groupe de transformations, entre les m variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et leurs m fonctions $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$. Adjoignons-leur m nouvelles coordonnées, non transformées, en posant:

$$u'_1 = u_1, \qquad u'_2 = u_2, \quad \ldots, \quad u'_m = u_m \tag{7}$$

et faisons porter la transformation sur une multiplicité définie par les m fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_m$ des m variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

La théorie générale, reprise sur cet exemple, montre que les équations (C) comprennent, en outre des équations (7), d'autres équations exprimant $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$ et leurs dérivées par rapport à $u'_1, u'_2, \ldots, u'_m$, en fonction des paramètres λ, des fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_m$, et des dérivées de celles-ci par rapport à $u_1, u_2, \ldots, u_m$, ces expressions étant en outre *indépendantes* de $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Il en résulte que les équations (E) sont, dans le cas d'une multiplicité initiale générale, de la forme:

$$u'_i = u_i, \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

$$J_i^0(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m) = J_i^0(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (i=1,2,\ldots,\mu_0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$J_i^N\left(x'_1, \ldots, x'_m, \ldots, \frac{\partial x'_h}{\partial u'_K}, \ldots, \frac{\partial^N x'_h}{\partial u_1'^{\alpha_1} \ldots \partial u_m'^{\alpha_m}}, \ldots\right)$$

$$= J_i^N\left(x_1, \ldots, x_m, \ldots, \frac{\partial x_h}{\partial u_K}, \ldots, \frac{\partial^N x_h}{\partial u_1^{\alpha_1} \ldots \partial u_m^{\alpha_m}}, \ldots\right) \qquad (i=1,2,\ldots,\mu_N)$$

où les invariants J sont indépendants des variables $u_1, \ldots, u_m$.

En particulier, supposons que la multiplicité initiale M soit la suivante:

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_2, \quad \ldots, \quad x_m = u_m.$$

Alors si

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m). \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,m)}$$

définit la transformation générale du groupe, la multiplicité M' sera:

$$x'_i = f_i(u'_1, u'_2, \ldots, u'_m). \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,m)}$$

M ne cesse d'ailleurs pas d'être une multiplicité générale, car alors les équations (C) se confondent, à la notation près, avec les équations (A): et celles-ci sont résolubles par rapport à tous les paramètres λ, sans quoi ces paramètres cesseraient d'être essentiels. D'autre part, l'élimination, entre les équations (E), des variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_m$ de M est immédiate, et par suite, M' satisfait, jusqu'à l'ordre N, aux seules équations suivantes, qui sont donc, sous une autre forme, les équations de définition du groupe:

$$(8) \quad \begin{aligned} & J_i^0(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m) = J_i^0(x_1, x_2, \ldots, x_m) && {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,\mu_0)} \\ & J_i^1\left(x'_1, \ldots, x'_m, \frac{\partial x'_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial x'_h}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial x'_m}{\partial x_m}\right) = \alpha_i^1(x_1, x_2, \ldots, x_m) && {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,\mu_1)} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & J_i^N(x'_1, \ldots, x'_m, \ldots, x'_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}, \ldots) = \alpha_i^N(x_1, x_2, \ldots, x_m) && {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,\mu_N)} \end{aligned}$$

où les α représentent ce que deviennent les J quand on y fait:

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad \ldots, \quad x'_m = x_m.$$

Donc:

Théorème III. *Les équations de définition des transformations d'un groupe de Lie s'obtiennent en exprimant que certaines fonctions J, de $x'_1, \ldots, x'_m$ et de leurs dérivées par rapport à $x_1, \ldots, x_m$ sont identiquement égales aux expressions qu'on en déduit en y attribuant aux x' les valeurs qu'elles ont pour la transformation identique.*

Ces invariants J jouent un rôle capital. On vient de voir qu'ils restent inaltérés si on effectue sur les x' un changement de fonctions défini par une transformation du groupe; d'où en se reportant au théorème IV (1[ère] partie, ch. II):

Théorème IV. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation appartienne au groupe défini par les équations* (8) *est qu'elle laisse invariantes les expressions J, quand on effectue sur les x' un changement de fonctions défini par cette transformation.*

CHAPITRE II.

Les invariants et équations invariantes, définis à l'aide des transformations infinitésimales d'un groupe de Lie.

1. Considérons les groupes, dits *à un paramètre,* dont les transformations dépendent d'une seule constante arbitraire. S'il y a n variables, les équations de définition comprendront $n - 1$ équations d'ordre zéro, de la forme:

$$J_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = J_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i=2,3,\ldots,n)$$

où les $n - 1$ fonctions $J_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont distinctes entre elles et de l'une au moins, x_1, par exemple, des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pour les ordres supérieurs, il y a autant d'équations que de dérivées.

En posant:

$$X_i = J_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$X'_i = J_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \qquad (i=2,3,\ldots,n)$$

la transformation générale du groupe sera donc de la forme suivante:

$$x'_1 = f(x_1, X_2, \ldots, X_n, a)$$
$$X'_i = X_i \qquad (i=2,3,\ldots,n)$$

avec la constante arbitraire a. La première équation peut être résolue par rapport à a:

$$\omega(x_1', x_1, X_2, \ldots, X_n) = a \tag{1}$$

et la fonction ω sera telle que l'équation (1) combinée à:

$$\omega(x_1'', x_1', X_2, \ldots, X_n) = b \tag{2}$$

entraînera:

$$\omega(x_1'', x_1, X_2, \ldots, X_n) = c,$$

c étant une nouvelle constante, et cela, quelles que soient les constantes a et b. Ceci veut dire que les équations homogènes en dx_1, dx_1', dx_1'':

$$\frac{\partial\omega(x_1', x_1)}{\partial x_1'}dx_1' + \frac{\partial\omega(x_1', x_1)}{\partial x_1}dx_1 = 0,$$

$$\frac{\partial\omega(x_1'', x_1')}{\partial x_1''}dx_1'' + \frac{\partial\omega(x_1'', x_1')}{\partial x_1'}dx_1' = 0,$$

$$\frac{\partial\omega(x_1'', x_1)}{\partial x_1''}dx_1'' + \frac{\partial\omega(x_1'', x_1)}{\partial x_1}dx_1 = 0$$

sont compatibles quels que soient x_1, x_1', x_1''. D'où l'identité:

$$\frac{\dfrac{\partial\omega(x_1'', x_1')}{\partial x_1''}}{\dfrac{\partial\omega(x_1'', x_1')}{\partial x_1'}}\cdot\frac{\partial\omega(x_1', x_1)}{\partial x_1'} + \frac{\dfrac{\partial\omega(x_1'', x_1)}{\partial x_1''}}{\dfrac{\partial\omega(x_1'', x_1)}{\partial x_1}}\cdot\frac{\partial\omega(x_1', x_1)}{\partial x_1} = 0.$$

Cette identité subsistant si on attribue à x_1'' une valeur numérique quelconque, la fonction $\omega(x_1', x_1, X_2, \ldots, X_n)$ satisfait donc à une équation de la forme suivante:

$$\varphi(x_1', X_2, \ldots, X_n)\frac{\partial\omega}{\partial x_1} + \varphi(x_1, X_2, \ldots, X_n)\frac{\partial\omega}{\partial x_1} = 0$$

et par suite, l'équation (1) peut s'écrire:

$$J_1(x_1', X_2, \ldots, X_n) - J_1(x_1, X_2, \ldots, X_n) = t$$

où t est une nouvelle constante, fonction de a.

$\omega(x'_1, x_1, X_2, \ldots, X_n)$ dépendant nécessairement de x'_1 et de x_1, il en est de même de $J_1(x_1, X_2, \ldots, X_n)$ relativement à x_1, et, par suite, en posant:

$$X_1 = J_1(x_1, X_2, \ldots, X_n), \qquad X'_1 = J_1(x'_1, X_2, \ldots, X_n),$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ seront indépendants, et on a:

$$X'_1 = X_1 + t.$$

Donc:[1]

Théorème I. *On peut, par un choix convenable de coordonnées, mettre la transformation générale d'un groupe de Lie à un paramètre sous la forme:*

$$(3) \qquad X'_1 = X_1 + t, \qquad X'_2 = X_2, \quad \ldots, \quad X'_n = X_n$$

où t est une constante arbitraire.

2. On retrouve ainsi une des propriétés, aujourd'hui bien classiques, des groupes à un paramètre. On pourrait en déduire les autres. Je remarquerai seulement, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ soit un invariant de ce groupe, est que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} = 0.$$

En retournant aux coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on trouve:

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} = \xi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

expression qu'on représente par Xf.

La transformation (3), pour $t = 0$, est la *transformation identique;* pour t ayant une valeur infiniment petite δt, elle est dite *transformation infinitésimale,* et attribue à une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un accroissement dont le premier terme est précisément $Xf \cdot \delta t$.

---

[1] Lie, *Theorie der Transformationsgruppen,* I, chap. 3, p. 49.

Le symbole Xf caractérise complètement la transformation infinitésimale et son groupe à un paramètre.

La condition pour qu'une fonction soit un invariant du groupe est qu'elle satisfasse à l'équation

$$Xf = 0,$$

et, de même, pour qu'un système d'équations:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_l = 0,$$

admette les transformations du groupe,[1] il faut et il suffit que ce système entraîne:

$$Xf_1 = 0, \quad Xf_2 = 0, \quad \ldots, \quad Xf_l = 0.$$

3. Ceci rappelé, nous distinguerons, avec M. Lie, entre une *transformation infinitésimale,* ainsi déduite d'un groupe à un paramètre, et une *transformation infiniment petite:*

$$(4) \qquad x'_i = x_i + \partial t \,.\, \xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \partial t^2 \,.\, \eta_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots$$

où les termes d'ordre supérieur au premier n'ont pas avec ceux du premier ordre la même dépendance que dans une transformation infinitésimale, et ne sont pas nécessairement déterminés par eux.

Pour exprimer qu'une telle transformation (4) appartient au groupe de Lie défini par les équations (8) du chap. I, adjoignons aux formules (4), les suivantes qui s'en déduisent par différentiation:

$$(5) \qquad \begin{array}{l} \dfrac{\partial x'_i}{\partial x_\mu} = \varepsilon_{i\mu} + \partial t \,.\, \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_\mu} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \partial t \,.\, \xi_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} + \ldots; \end{array} \qquad \begin{array}{l} \varepsilon_{i\mu} = 0 \text{ pour } i \neq \mu \\ \varepsilon_{ii} = 1 \end{array}$$

[1] Ib., ch. 7, p. 108. Le système d'équations est supposé ne pas annuler tous les déterminants fonctionnels d'ordre l de $f_1, f_2, \ldots, f_l$.

on trouve ainsi, en écrivant que les équations de définition sont satisfaites, jusqu'aux termes du premier ordre, que les ξ sont assujettis aux seules relations suivantes, *linéaires et homogènes* par rapport aux ξ et à leurs dérivées:

(6)
$$
\begin{aligned}
&\sum_j \left(\frac{\partial J_i^0}{\partial x_j'}\right)_0 \cdot \xi_j = 0 && (i=1,2,\ldots,\mu_0)\\
&\sum_j \left(\frac{\partial J_i^1}{\partial x_j'}\right)_0 \xi_j + \sum_{j,\mu} \left(\frac{\partial J_i^1}{\partial \dfrac{\partial x_j'}{\partial x_\mu}}\right)_0 \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial x_\mu} = 0 && (i=1,2,\ldots,\mu_1)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sum \left(\frac{\partial J_i^N}{\partial x_j'}\right)_0 \xi_j + \cdots + \sum \left(\frac{\partial J_i^N}{\partial x'_{j,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}}\right)_0 \cdot \xi_{j,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = 0 && (i=1,2,\ldots,\mu_N)
\end{aligned}
$$

où l'indice inférieur o indique que l'on prend les valeurs des dérivées des J pour

$$x_i' = x_i, \qquad \frac{\partial x_j'}{\partial x_\mu} = \varepsilon_{j,\mu}, \quad \ldots, \quad x'_{j,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = 0.$$

A un autre point de vue (chap. I, théor. IV), il suffit aussi d'exprimer que la transformation (4), où les x' et les x sont deux systèmes de n fonctions des mêmes variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_n$, laisse invariantes les expressions $J^0, J^1, \ldots, J^N$, fonctions des x et de leurs dérivées par rapport aux u. En calculant, à l'aide de (4), les expressions des dérivées des x', les termes du premier ordre obtenus sont les mêmes que ceux qui se déduiraient d'une transformation infinitésimale entre les x et leurs dérivées par rapport aux u:

$$X^{(N)}f = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots + \sum \bar{\xi}_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} \frac{\partial f}{\partial x_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}}$$

où l'on pose:

$$x_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \frac{\partial^N x_i}{\partial u_1^{\alpha_1} \partial u_2^{\alpha_2} \cdots \partial u_n^{\alpha_n}}.$$

Les $\bar{\xi}_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ sont des fonctions bien déterminées, lorsque les ξ sont don-

nés, des x et de leurs dérivées, et $X^{(N)}f$ n'est autre chose que la *transformation prolongée,*[1] jusqu'à l'ordre N de

$$Xf = \sum \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Les ξ sont donc assujettis à satisfaire aux identités suivantes, par rapport aux x et leurs dérivées:

$$(7) \qquad XJ_i^0 = 0, \qquad X^{(1)}J_i^1 = 0, \quad \ldots, \quad X^{(N)}J_i^N = 0.$$

Or, ces mêmes relations expriment que les J admettent la transformation infinitésimale Xf, et par suite, son groupe à un paramètre.

Le raisonnement suppose d'ailleurs seulement que les ξ sont, dans (4), les coefficients des termes d'ordre le moins élevé. Donc:

Théorème II. *Etant donnée une transformation infiniment petite d'un groupe de Lie, la transformation infinitésimale définie par ses termes d'ordre le moins élevé, et son groupe à un paramètre appartiennent aussi au groupe de Lie.*[2]

Soit cette transformation infinitésimale, ayant mêmes termes du premier ordre que (4):

$$\bar{x}_i = x_i + \partial t \,.\, \xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

on aura:

$$x_i' = \bar{x}_i + \partial t^2 \,.\, \theta_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots$$

ou en exprimant les seconds membres en fonction de $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$:

$$x_i' = \bar{x}_i + \partial t^2 \,.\, \theta_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) + \ldots.$$

Pour les mêmes raisons que tout à l'heure, la transformation infinitésimale:

$$Yf = \sum_i \theta_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

---

[1] LIE, *Transformationsgruppen,* I, ch. 25, p. 523. — Je suppose connus ici tous les résultats exposés dans ce chapitre.

[2] LIE, *Die Grundlagen,* etc., p. 342.

appartient encore au groupe; et ainsi de suite. On peut donc considérer la transformation infiniment petite (4), en ce qui concerne au moins ses termes pris jusqu'à un ordre infinitésimal quelconque, comme *obtenue en effectuant successivement un certain nombre de transformations infinitésimales du groupe.*

Il y a plus, si Xf et Yf appartiennent toutes deux au groupe, $X^{(N)}f$ et $Y^{(N)}f$ satisfont toutes deux aux équations (7), et par suite, aussi $(X^{(N)}Y^{(N)})$. Cette dernière, étant, comme on sait,[1] la transformation prolongée de (XY), la transformation infinitésimale (XY) appartient au groupe. Donc:

Théorème III. *Si les deux transformations infinitésimales Xf et Yf appartiennent à un groupe de Lie, il en est de même de leur crochet* (XY).[2]

4. Cette propriété du système d'équations (6) permet de retrouver les invariants dont on a établi l'existence, par une marche tout à fait parallèle à celle déjà suivie.

Reprenons, en effet, un système de p fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ de n variables indépendantes, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, les $r = n + p$ quantités y et z n'étant autre chose que $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Considérons une transformation infinitésimale quelconque:

$$Xf = \sum_{i=1}^{i=n} \eta_i(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p)\frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{i=p} \zeta_i(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p)\frac{\partial f}{\partial z_i}$$

et, en calculant les variations qu'elle fait subir aux dérivées des z, par rapport aux y, *prolongeons*-la jusqu'à un ordre quelconque K

$$X^{(K)}f = \sum_{i=1}^{i=n} \eta_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{i=p} \zeta_i \frac{\partial f}{\partial z_i} + \sum_{i=1}^{i=\rho_1} \zeta_i^{(1)} \frac{\partial f}{\partial z_i^1} + \cdots + \sum_{i=1}^{i=\rho_K} \zeta_i^{(K)} \frac{\partial f}{\partial z_i^K}.$$

---

[1] Lie, *Transformationsgruppen*, I, chap. 25, p. 547.

[2] Lie, *Die Grundlagen*, etc., p. 348. — Dans le cas d'un groupe fini, les transformations infinitésimales du groupe sont des fonctions linéaires à coefficients constants d'un certain nombre d'entre elles $X_1f, X_2f, \ldots, X_rf$, et ce théorème établit l'existence des relations:

$$(X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f.$$

Les y et z étant égaux aux coordonnées x, nous égalerons les η et ζ aux ξ correspondants, ceux qui sont relatifs aux variables non transformées, s'il y en a, étant égalés à zéro. Alors, les ξ satisfaisant aux relations (6) et à celles qui s'en déduisent par dérivation, on peut, jusqu'à l'ordre K, exprimer un certain nombre de ξ et de leurs dérivées, en fonction *linéaire et homogène* des autres, qui restent *arbitraires,* et on trouve ainsi, $X^{(K)}f$ étant linéaire et homogène par rapport aux ξ et leurs dérivées:

$$(8) \qquad X^{(K)}f = \sum_{i=1}^{i=\varepsilon_0} \xi_i^0 X_{0,i}f + \sum_{i=1}^{i=\varepsilon_1} \xi_i^1 X_{1,i}f + \ldots + \sum_{i=1}^{i=\varepsilon_K} \xi_i^K X_{K,i}f$$

où les $X_{K,i}f$ sont des transformations infinitésimales bien déterminées, par rapport aux y, z, et aux dérivées des z et les ξ_i^K des coefficients arbitraires.

Toute fonction des y, des z et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre K, ou tout système d'équations entre ces mêmes quantités qui admet toutes les transformations infinitésimales du groupe, admet donc les transformations

$$(9) \qquad X_{0,i}f, \quad X_{1,i}f, \quad \ldots, \quad X_{K,i}f$$

et réciproquement.

Les équations obtenues en égalant à zéro les expressions (9) forment d'ailleurs un *système complet.* En effet, si $X^{(K)}f$ et $Y^{(K)}f$ appartiennent toutes deux à la forme (8), nous savons qu'il en est de même de leur crochet $(X^{(K)}Y^{(K)})$, quels que soient au reste les coefficients de $X^{(K)}f$ et de $Y^{(K)}f$. En particulier, $(X_{K,i}, X_{K,j})$ appartient donc à cette forme (8): c'est donc bien une combinaison linéaire et homogène de transformations (9).

5. Je dis que, de cette manière, on n'obtient pas d'invariants distincts de ceux obtenus par le procédé du chapitre précédent. En effet, d'abord, ces nouveaux invariants admettent une transformation infiniment petite quelconque du groupe, car l'expression obtenue en faisant une telle transformation sur l'un d'eux, est, jusqu'à un ordre infinitésimal quelconque, la même que si on effectuait successivement plusieurs transformations infinitésimales. Elle ne diffère donc de l'invariant que de quantités dont l'ordre peut être pris arbitrairement, et par suite, lui est identique.

Or, en se reportant aux équations (A) du chapitre précédent, une transformation infiniment petite s'obtient en attribuant aux paramètres λ des *valeurs arbitraires,* assujetties seulement à être infiniment voisines de celles qu'elles ont dans le cas de la transformation identique. Tout invariant ou équation invariante admettant les transformations (9) est donc indépendant de ces arbitraires, et se confond bien avec un invariant ou une équation invariante, obtenue par le premier procédé. Donc:

Théorème IV. *Les invariants d'un groupe de Lie peuvent s'obtenir par la recherche des solutions communes à un système complet d'équations linéaires aux dérivées partielles; la formation de ce système résulte immédiatement des équations de définition des transformations infinitésimales du groupe.*

Les systèmes d'équations invariantes sont ceux qui admettent l'ensemble des transformations infinitésimales ainsi formées.[1]

6. **Exemple.** Reprenons le groupe des mouvements du plan, dont les équations de définition:

$$\left(\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_1'}{\partial x_2}\right)^2=1, \qquad \left(\frac{\partial x_2'}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2'}{\partial x_2}\right)^2=1,$$

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\frac{\partial x_2'}{\partial x_1}+\frac{\partial x_1'}{\partial x_2}\frac{\partial x_2'}{\partial x_2}=0,$$

$$0=\frac{\partial^2 x_1'}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 x_1'}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 x_1'}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 x_2'}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 x_2'}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 x_2'}{\partial x_2^2}$$

donnent, pour les transformations infinitésimales:

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}=0, \qquad \frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}=0, \qquad \frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}=0,$$

$$0=\frac{\partial^2\xi_1}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2\xi_1}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2\xi_1}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2\xi_2}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2\xi_2}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2\xi_2}{\partial x_2^2}.$$

---

[1] LIE, *Über Differentialinvarianten,* Math. Annalen, t. 24, p. 566. — *Die Grundlagen,* etc., p. 370 et 374.

Rappelons que les systèmes d'équations invariantes dont il est question, s'obtiennent en égalant à zéro les déterminants d'un même ordre, formés avec les coefficients des transformations (9).

La transformation étant supposée porter sur une fonction $z = x_2$, d'une variable $y = x_1$, on aura:

$$\partial y = \xi_1 \partial t, \qquad \partial z = \xi_2 \partial t,$$

$$\partial z' = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + z'\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right) - z'^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(1 + z'^2),$$

$$\partial z'' = 2z'z'' \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} - z''\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + z' \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right) = 3z'z'' \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}.$$

Les invariants du second ordre admettent ainsi les transformations:

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \ \frac{\partial f}{\partial z}, \ (1 + z'^2)\frac{\partial f}{\partial z'} + 3z'z''\frac{\partial f}{\partial z''}$$

ce qui reproduit *l'équation invariante du* 1er *ordre:*

$$(1 + z'^2) = 0$$

et *l'invariant du second ordre:*

$$z''(1 + z'^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

CHAPITRE III.

Systèmes finis d'invariants, et paramètres différentiels.

1. Nous avons vu que toute multiplicité M', déduite d'une multiplicité *générale* M, par une transformation d'un groupe de Lie, a ses invariants égaux à ceux de M, savoir:

$$J_i^K(z_1'^0, \ldots, z_{\rho_0}'^0, z_1'^1, \ldots, z_{\rho_1}'^1, \ldots, z_1'^K, \ldots, z_{\rho_K}'^K) = J_i^K(z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0, z_1^1, \ldots, z_{\rho_1}^1, \ldots, z_1^K, \ldots, z_{\rho_K}^K)$$
$$(K = 1, 2, \ldots) \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu_K)$$

ou, pour abréger l'écriture:

(1) $$J_i'^K = J_i^K;$$

et les multiplicités M' satisfont aux équations obtenues par l'élimination des coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_n$ d'un point de M entre ces relations (1); et à celles-là seulement.

Supposons, par exemple, que l'on puisse trouver n invariants distincts $I_1, I_2, \ldots, I_n$, en nombre égal à celui des coordonnées d'un point de M. Sur la multiplicité M, ils se réduisent à n fonctions de $y_1, y, \ldots, y_n$ que nous supposerons encore distinctes. Alors, tout autre invariant J, de M, peut s'exprimer en fonction de $I_1, I_2, \ldots, I_n$:

$$J - \varphi(I_1, I_2, \ldots, I_n) = 0 \tag{2}$$

et les équations auxquelles satisfait M' sont les suivantes:

$$J' - \varphi(I'_1, I'_2, \ldots, I'_n) = 0$$

ou, plus simplement:

$$J' - \varphi' = 0. \tag{3}$$

On en déduit, par différentiation par rapport à y'_i:

$$\frac{dJ'}{dy'_i} - \frac{\partial\varphi'}{\partial I'_1}\cdot\frac{dI'_1}{dy'_i} - \ldots - \frac{\partial\varphi'}{\partial I'_n}\cdot\frac{dI'_n}{dy'_i} = 0 \tag{4}$$

où l'on représente par $\frac{df}{dy_i}$, la dérivée totale, par rapport à y_i, d'une fonction f, de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, de $z_1, z_2, \ldots, z_p$, et de leurs dérivées z_i^K, c'est-à-dire:

$$\frac{df}{dy_i} = \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\partial f}{\partial z_\mu}\cdot\frac{\partial z_\mu}{\partial y_i} + \sum_{K\geq 1}\sum_{\mu=1}^{\mu=p_K} \frac{\partial f}{\partial z_\mu^K}\cdot\frac{\partial z_\mu^K}{\partial y_i}.$$

Ces relations (4) doivent se déduire, comme on sait, de la considération d'invariants nouveaux. En effet, il résulte d'abord des relations:

$$I'_1 = I_1, \quad \ldots, \quad I'_n = I_n, \qquad J' = J, \tag{5}$$

que $I'_1, I'_2, \ldots, I'_n$, sont comme $I_1, I_2, \ldots, I_n$, des fonctions distinctes

de $y'_1, \dots, y'_n$. Les relations (4) peuvent donc être résolues par rapport à $\frac{\partial\varphi'}{\partial I'_1}, \dots, \frac{\partial\varphi'}{\partial I'_n}$, et se mettre sous la forme:

$$(4') \qquad \frac{D(I'_1, I'_2, \dots, I'_n)}{D(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)}\frac{\partial\varphi'}{\partial I'_i} - \frac{D(I'_1, \dots, I'_{i-1}, J', I'_{i+1}, \dots, I'_n)}{D(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)} = 0. \quad (i=1,2,\dots,n)$$

De la même manière, on déduit des identités (2) les suivantes:

$$\frac{D(I_1, I_2, \dots, I_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}\frac{\partial\varphi}{\partial I_i} - \frac{D(I_1, \dots, I_{i-1}, J, I_{i+1}, \dots, I_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} = 0.$$

Or, en vertu de (5), on a:

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial I'_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial I_i}$$

et par suite, les équations (4) deviennent:

$$(6) \qquad \frac{D(I'_1, \dots, I'_{i-1}, J', I'_{i+1}, \dots, I'_n)}{D(I'_1, \dots, I'_{i-1}, I'_i, I'_{i+1}, \dots, I'_n)} = \frac{D(I_1, \dots, I_{i-1}, J, I_{i+1}, \dots, I_n)}{D(I_1, \dots, I_{i-1}, I_i, I_{i+1}, \dots, I_n)}$$

où chacun des deux membres représente le quotient de deux déterminants fonctionnels formés avec des dérivées totales par rapport aux y', pour le premier, aux y, pour le second.

Les équations (5) donnent donc par l'élimination de $y_1, \dots, y_n$, une relation, qui, par différentiation, conduit à n nouvelles; et celles-ci peuvent s'obtenir autrement par l'élimination de $y_1, \dots, y_n$ entre les équations (5) et (6). On voit par là que:

Théorème I. *Etant donnés $n+1$ invariants, le quotient de deux de leurs déterminants fonctionnels formés avec leurs dérivées totales par rapport aux n variables indépendantes, $y_1, y_2, \dots, y_n$, constitue un invariant nouveau.*

Nous dirons que cet invariant (6) *se déduit par différentiation, de* $I_1, \dots, I_n, J$, avec les *invariants de base* $I_1, \dots, I_n$.

2. Les équations, relatives à M', auxquelles conduisent ces invariants, ne diffèrent pas de celles déduites par différentiation des équa-

tions (3). Il en résulte qu'il sera possible, à partir d'un certain ordre, d'obtenir par ce procédé, appliqué aux invariants de cet ordre ou d'ordre inférieur, tous les invariants d'ordre supérieur. Autrement, on aurait ainsi un système d'équations aux dérivées partielles, qui, sans être incompatible, ne serait pas limité. Désignons par $I_1, I_2, \ldots, I_n, J_1, J_2, \ldots, J_\rho$, l'ensemble de tous ces invariants, pris jusqu'à cet ordre: nous dirons qu'ils forment un *système complet d'invariants.*

Cela étant, considérons deux multiplicités, l'une: M, *générale* et pour laquelle les *invariants de base* $I_1, I_2, \ldots, I_n$ *sont distincts,* définie par p fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, l'autre: M', représentée par p fonctions $z'_1, \ldots, z'_p$ des variables $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$. S'il existe une transformation du groupe permettant de passer de M à M', on peut exprimer $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ en fonction de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, de façon à satisfaire simultanément aux équations:

$$(7) \qquad I'_1 = I_1, \quad \ldots, \quad I'_n = I_n, \qquad J'_1 = J_1, \quad \ldots, \quad J'_\rho = J_\rho.$$

Ces conditions sont en outre suffisantes. En effet, M étant soumise aux restrictions énoncées, les relations (7) entraînent les suivantes:

$$(8) \qquad H' = H$$

où H est un invariant quelconque se déduisant par différentiation de ceux du système complet, et peut être par suite un invariant quelconque du groupe. Considérons alors un point quelconque $(y_1)_0, (y_2)_0, \ldots, (y_n)_0$ de M, et les valeurs en ce point des z et leurs dérivées: $(z_1)_0, \ldots, (z_p)_0$, $(z_1^1)_0, \ldots, (z_{\rho_1}^1)_0, \ldots, (z_1^K)_0, \ldots, (z_{\rho_K}^K)_0, \ldots$; puis, défini par les équations (7), le point correspondant de M', $(y'_1)_0, (y'_2)_0, \ldots, (y'_n)_0$, avec les valeurs, en ce point, des fonctions z' et de leurs dérivées: $(z'_1)_0, \ldots, (z'_p)_0, (z'^1_1)_0$, $\ldots, (z'^1_{\rho_1})_0, \ldots, (z'^K_1)_0, \ldots, (z'^K_{\rho_K})_0, \ldots$.

Si on se reporte aux équations (C) du chapitre I:

$$(C) \qquad z'^K_i = \varpi^K_i(z^0_1, \ldots, z^0_{\rho_0}, z^1_1, \ldots, z^1_{\rho_1}, \ldots, z^K_1, \ldots, z^K_{\rho_K}, \lambda^0_1, \ldots, \lambda^0_{\varepsilon_0}, \ldots, \lambda^K_1, \ldots, \lambda^K_{\varepsilon_K}), \atop (K=1,2,\ldots) \qquad (i=1,2,\ldots,\rho_K)$$

les relations (7) et (8), satisfaites pour les valeurs particulières consi-

dérées, expriment que l'on peut attribuer aux paramètres λ des valeurs particulières $(\lambda_i^K)_0$, telle que, pour:

$$\lambda_i^K = (\lambda_i^K)_0, \qquad z_i^K = (z_i^K)_0$$

on ait:

$$z_i'^K = (z_i'^K)_0$$

et cela, jusqu'à un ordre quelconque Q. A ces valeurs des paramètres λ correspondent des fonctions $x_1', x_2', \ldots, x_r'$ de $x_1, x_2, \ldots, x_r$, satisfaisant aux équations du groupe, dont les valeurs ainsi que celles de toutes leurs dérivées, sont déterminées pour:

$$x_1 = (x_1)_0 = (y_1)_0, \quad \ldots, \quad x_n = (x_n)_0 = (y_n)_0,$$
$$x_{n+1} = (x_{n+1})_0 = (z_1)_0, \quad \ldots, \quad x_r = (x_r)_0 = (z_p)_0.$$

Ces fonctions représentent une transformation du groupe, qui, effectuée sur M, donne une nouvelle multiplicité $\overline{M}$, telle que, au point $(y_1)_0, \ldots, (y_n)_0$ de M, correspond le point $(y_1')_0, \ldots, (y_n')_0$, les valeurs des fonctions et de leurs dérivées en ce point étant en outre données par les équations (C), en y faisant $\lambda_i^K = (\lambda_i^K)_0$ et $z_i^K = (z_i^K)_0$. $\overline{M}$ doit nécessairement se confondre avec M', les fonctions et toutes leurs dérivées ayant, dans chacune d'elles, les mêmes valeurs, pour les mêmes valeurs des variables indépendantes. La transformation considérée transforme donc bien M en M'.

Ici pourrait se présenter cette objection que les développements ainsi obtenus peuvent ne pas être convergents; auquel cas la transformation qu'ils définissent serait illusoire. Mais toute solution des équations (7) peut être considérée comme représentant $r = n + p$ fonctions, $y_1', \ldots, y_n'$, $z_1', \ldots, z_p'$ des variables $y_1, \ldots, y_n$. Notre proposition établit qu'à une pareille solution, correspondent r fonctions $x_1', x_2', \ldots, x_r'$, des variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$, satisfaisant aux équations de définition du groupe, et se réduisant à ces fonctions $y_1', \ldots, y_n', z_1', \ldots, z_p'$ de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, c'est-à-dire de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, lorsqu'on y fait:

$$x_{n+1} = z_1, \quad \ldots, \quad x_r = z_p,$$

$z_1, z_2, \ldots, z_p$ étant les fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qui représentent M. Il résulte des propositions générales relatives aux équations aux dérivées

partielles, que, si ces fonctions $y'_1, \ldots, y'_n, z'_1, \ldots, z'_p$ de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont régulières (nous supposons toujours qu'il en est ainsi), il en est de même des fonctions $x'_1, x'_2, \ldots, x'_r$ de $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

3. *Paramètres différentiels, ou opérations invariantes.* Les résultats précédents tombent en défaut lorsque, sur la multiplicité M, les invariants de base $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ne sont plus distincts. Dans ce cas, M et ses transformées satisfont toutes à une même relation de la forme:

$$f(I_1, I_2, \ldots, I_n) = 0.$$

On pourrait alors les traiter comme *multiplicités particulières,* satisfaisant à *l'équation invariante* précédente; mais ce procédé aurait le défaut d'exiger une étude spéciale pour chaque équation de cette forme; et la relation entre $I_1, \ldots, I_n$ peut d'ailleurs être arbitraire.

Il est préférable de reprendre la discussion générale à l'aide d'une notion nouvelle, celle de *paramètres différentiels* ou *opérations invariantes.* On appelle ainsi, étant donné un invariant J, une fonction de ses dérivées totales, $\frac{dJ}{dy_i}$, des variables y, des fonctions z et de leurs dérivées, qui, quelque soit J, constitue aussi un invariant: le paramètre est *du* $K^{\text{ième}}$ *ordre,* si les dérivées de J qu'il renferme sont d'ordre K et d'ordre inférieur. Dans le cas précédent nous avons établi l'existence de n paramètres différentiels du premier ordre:

$$\frac{D(I_1, \ldots, I_{i-1}, J, I_{i+1}, \ldots, I_n)}{D(I_1, \ldots, I_i, \ldots, I_n)}, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

lesquels sont des formes linéaires, homogènes, et indépendantes, de $\frac{dJ}{dy_1}, \ldots, \frac{dJ}{dy_n}$.

La recherche de l'expression générale de ces paramètres différentiels se réduit à une simple construction d'invariants. Il suffit, aux fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ de $y_1, \ldots, y_n$, d'en ajouter une nouvelle, J, que la transformation laisse invariante:

$$J' = J.$$

Les transformées des dérivées du premier ordre sont définies par les relations:

$$\frac{dJ}{dy_i}=\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\frac{dJ}{dy'_\mu}\left[\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_i}+\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_{n+\nu}}\frac{\partial z_\nu}{\partial y_i}\right] \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

où les dérivées $\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_i}$, $\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_{n+\nu}}$, satisfont aux équations de définition du groupe. En les remplaçant par leurs expressions paramétriques, et résolvant par rapport aux $\frac{dJ}{dy'_i}$, il vient:

$$(8) \qquad \frac{dJ}{dy'_i}=A_{i1}\frac{dJ}{dy_1}+A_{i2}\frac{dJ}{dy_2}+\ldots+A_{in}\frac{dJ}{dy_n} \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

où les A sont fonctions de $y_1,\ldots,y_n, z_1,\ldots,z_p, \frac{\partial z_1}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial z_1}{\partial y_n},\ldots,\frac{\partial z_p}{\partial y_n}$ et des paramètres $\lambda_1^0,\ldots,\lambda_{s_0}^0, \lambda_1^1,\ldots,\lambda_{s_1}^1$, des ordres zéro et un. Il faut éliminer les λ entre ces équations (8) et les équations (C):

$$(C) \qquad z_i'^K=\varpi_i^K(z_1^0,\ldots,z_{\rho_0}^0,\ldots,z_1^K,\ldots,z_{\rho_K}^K,\lambda_1^0,\ldots,\lambda_{s_0}^0,\ldots,\lambda_1^K,\ldots,\lambda_{s_K}^K). \qquad (K=1,2,\ldots) \quad (i=1,2,\ldots,\rho_K)$$

Pour cela, il est possible en général de résoudre les équations (C) jusqu'à un certain ordre minimum K, déterminé, par rapport aux paramètres $\lambda_1^0,\ldots,\lambda_{s_0}^0, \lambda_1^1,\ldots,\lambda_{s_1}^1$, ou un certain nombre d'entre eux, de façon que, leurs valeurs étant portées dans les relations (8), tous les λ disparaissent: il en est certainement ainsi dans le cas au moins où on peut former n invariants distincts $I_1, I_2,\ldots,I_n$, car, dans cette hypothèse, nous avons établi l'existence de n paramètres différentiels du premier ordre, distincts. En remplaçant dans les seconds membres de (8), ainsi transformés, les $z_i'^K$ qui y figurent par des constantes arbitraires, on obtient n expressions:

$$\Delta_i J=\alpha_{i1}\frac{dJ}{dy_1}+\alpha_{i2}\frac{dJ}{dy_2}+\ldots+\alpha_{in}\frac{dJ}{dy_n}, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

qui sont des invariants, c'est-à-dire, ici, les *paramètres différentiels*. Les α sont des fonctions de $y_1, y_2,\ldots,y_n$, de $z_1, z_2,\ldots,z_p$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre K. Ces paramètres sont des *fonctions linéaires et homogènes* des dérivées de J; ils sont en outre en général, *indépendants*, car, pour

des valeurs particulières attribuées aux arguments dont dépendent les α, $\Delta_i J$ se réduit respectivement à $\frac{dJ}{dy_i}$.

L'existence de ces paramètres différentiels tombe en défaut, seulement dans le cas où la résolution des équations (C) n'est plus possible comme elle a été effectuée, ce qui se produit lorsque M satisfait à une ou plusieurs *équations invariantes bien déterminées.* Il en est de même de leur indépendance: le déterminant de ces n paramètres, égalé à zéro, donne une *équation invariante,* ou se décompose en plusieurs équations, dont chacune est *invariante,* car, si elle est satisfaite par la multiplicité M, on a entre ces n paramètres, une relation linéaire:

$$\beta_1 \Delta_1 J + \beta_2 \Delta_2 J + \ldots + \beta_n \Delta_n J = 0$$

à coefficients non tous nuls, et qui, après toute transformation effectuée sur M, se transforme en une autre relation linéaire

$$\beta'_1 \Delta_1 J + \beta'_2 \Delta_2 J + \ldots + \beta'_n \Delta_n J = 0.$$

C'est là l'avantage de ces paramètres sur les premiers que nous avons formés, car ceux-ci cessent d'être holomorphes ou indépendants, dans le cas où M satisfait à des équations invariantes, dépendant de *fonctions arbitraires.*

4. Ces n paramètres jouissent de propriétés capitales. D'abord, tout autre paramètre différentiel, linéaire, et du premier ordre:

$$\Delta J = \beta_0 + \beta_1 \frac{dJ}{dy_1} + \beta_2 \frac{dJ}{dy_2} + \ldots + \beta_n \frac{dJ}{dy_n}$$

est une fonction linéaire de $\Delta_1 J, \Delta_2 J, \ldots, \Delta_n J$, dont les coefficients sont eux-mêmes des invariants. Car, $\Delta_1 J, \ldots, \Delta_n J$ étant indépendants, on a:

$$\Delta J = \gamma_0 + \gamma_1 \Delta_1 J + \gamma_2 \Delta_2 J + \ldots + \gamma_n \Delta_n J,$$

de sorte que toute transformation du groupe, effectuée sur M et sur une fonction quelconque J, de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, donnerait:

$$\gamma'_0 + \gamma'_1 \Delta'_1 J' + \ldots + \gamma'_n \Delta'_n J' = \gamma_0 + \gamma_1 \Delta_1 J + \ldots + \gamma_n \Delta_n J,$$

ou

$$\gamma'_0 - \gamma_0 + (\gamma'_1 - \gamma_1) \Delta_1 J + \ldots + (\gamma'_n - \gamma_n) \Delta_n J = 0$$

et cette identité aurait lieu quelle que soit la transformation. $\Delta_1 J, \ldots, \Delta_n J$ étant distincts, ceci exige bien:

$$\gamma'_0 - \gamma_0 = 0, \qquad \gamma'_1 - \gamma_1 = 0 \;.\; \ldots, \quad \gamma'_n - \gamma_n = 0.$$

En particulier, les deux paramètres différentiels du second ordre $\Delta_\mu \Delta_\nu J$ et $\Delta_\nu \Delta_\mu J$ ayant une différence qui ne contient que des dérivées du premier ordre de J, on a:

$$\Delta_\mu \Delta_\nu J - \Delta_\nu \Delta_\mu J = \gamma_{\mu\nu 1} \Delta_1 J + \ldots + \gamma_{\mu\nu n} \Delta_n J,$$

les γ étant encore des invariants.[1] $\Delta_\mu J$ et $\Delta_\nu J$ se réduisant d'ailleurs, pour des valeurs particulières des variables, à $\frac{dJ}{dy_\mu}$ et $\frac{dJ}{dy_\nu}$, $\Delta_\mu \Delta_\nu J$ et $\Delta_\nu \Delta_\mu J$ se réduisent dans les mêmes conditions à $\frac{d^2 J}{dy_\mu dy_\nu}$, à des termes additifs près ne contenant que des dérivées du premier ordre. On obtient donc, par la combinaison des paramètres du premier ordre, autant de paramètres du second ordre distincts qu'il y a de dérivées de cet ordre: il en est manifestement de même pour les ordres supérieurs, et l'on voit que, dans la formation de ces paramètres, on peut faire abstraction de l'ordre dans lequel on combine les paramètres du premier ordre.

Ensuite, les n opérations $\Delta_1 J, \ldots, \Delta_n J$, effectuées sur q invariants $J_1, J_2, \ldots, J_q$, d'ordre σ, au moins égal à K, donnent autant d'invariants d'ordre $\sigma + 1$, distincts par rapport aux dérivées d'ordre $\sigma + 1$, qu'il y a de fonctions distinctes par rapport aux mêmes dérivées, parmi les quantités $\frac{dJ_1}{dy_1}, \ldots, \frac{dJ_1}{dy_n}, \ldots, \frac{dJ_q}{dy_n}$. En effet, les n invariants $\Delta_1 J_i$, $\ldots$, $\Delta_n J_i$, en tant que fonctions des dérivées d'ordre $\sigma + 1$, sont n fonctions linéaires distinctes de $\frac{dJ_i}{dy_1}, \ldots, \frac{dJ_i}{dy_n}$, les uns et les autres étant

[1] Ce résultat peut s'interpréter ainsi. Les invariants étant considérés comme solutions d'un système complet d'équations linéaires que l'on sait former, ce système admet les transformations infinitésimales $\Delta_\mu f$, où les dérivées totales $\frac{df}{dy_i}$ sont explicitées. Il admet aussi les transformations $(\Delta_\mu \Delta_\nu)$: celles-ci s'exprimant en fonctions linéaires de $\Delta_1 f, \ldots, \Delta_n f$, on sait que les coefficients de ces formes linéaires sont des solutions du système complet. Lie, Math. Annalen, Bd. 11.

d'ailleurs des formes linéaires des dérivées d'ordre $\sigma + 1$. Si donc les dérivées $\frac{dJ}{dy_\mu}$ peuvent s'exprimer linéairement en fonction de ρ d'entre elles, indépendantes, il y aura, de même, ρ invariants $\Delta_\mu J_i$ indépendants, $H_1, H_2, \ldots, H_\rho$, les $nq - \rho$ autres pouvant se mettre sous la forme:

$$H_i = a_{i0} + a_{i1}H_1 + \ldots + a_{i\rho}H_\rho \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,nq-\rho)}$$

où les a ne dépendent pas des dérivées d'ordre $\sigma + 1$. $H_1, H_2, \ldots, H_\rho$ étant indépendants, il en résulte, comme plus haut, que ces coefficients a sont encore des invariants lesquels peuvent, au reste, se réduire à des constantes.

En particulier, on retrouve que les expressions $\Delta_\mu \Delta_\nu J$ constituent bien $\frac{1}{2}n(n + 1)$ paramètres différentiels du second ordre, distincts.

5. Cela étant, dans la détermination des invariants d'une multiplicité M, on trouve, ou bien seulement un nombre fini d'invariants, ou bien un nombre d'invariants qui croît sans limite avec l'ordre. Construisons, dans ce cas, les n paramètres $\Delta_1 J, \Delta_2 J, \ldots, \Delta_n J$, et soit K l'ordre le plus élevé des dérivées qui figurent dans leurs coefficients: la détermination des invariants d'ordre au plus égal à K, $J_1^0, \ldots, J_{\mu_0}^0, \ldots, J_1^K, \ldots, J_{\mu_K}^K$, se fait en même temps, de sorte qu'on a entre M et ses transformées M', les relations:

$$(9) \qquad J_i'^h = J_i^h. \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,K)\ (i=1,2,\ldots,\mu_K)}$$

De celles d'ordre K, on déduit, à l'aide des paramètres différentiels, les suivantes, d'ordre $K + 1$:

$$(10) \qquad \Delta_\nu' J_i'^K = \Delta_\nu J_i^K. \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\ldots,n)\ (i=1,2,\ldots,\mu_K)}$$

Le nombre de celles-ci qui sont indépendantes, entre elles et des relations (9), est égal, avons-nous vu, au nombre des fonctions distinctes d'ordre $K + 1$, que l'on peut former avec les dérivées $\frac{dJ_i^K}{dy_\nu}$, et ne pourrait s'abaisser que si les paramètres différentiels $\Delta_\nu J$ cessaient d'être indépendants en vertu des relations (9), c'est-à-dire en raison des valeurs que

prennent sur M, les invariants $J_1^0, \dots, J_{\mu_0}^0, \dots, J_1^K, \dots, J_{\mu_K}^K$. Nous supposerons qu'il n'en est pas ainsi.

Alors les équations d'ordre $K + 1$, entre M et M', comprennent les équations (10), et s'il y a lieu, un certain nombre d'autres, fournies par des invariants distincts des précédents. On procèdera de même pour les invariants suivants d'ordre $K + 2$, et ainsi de suite. A partir d'un certain ordre l, tous les invariants d'ordre supérieur s'obtiennent en effectuant les opérations invariantes, une ou plusieurs fois, sur ceux d'ordre l.

La chose s'établirait de la même manière qu'il a été démontré que tout système d'équations aux dérivées partielles est nécessairement limité. C'est aussi ce qui résulte du même fait, établi dans le cas où on applique le procédé par différentiation, ce qui revient à substituer aux paramètres $\Delta_1 J, \Delta_2 J, \dots, \Delta_n J$, un système particulier de n autres paramètres, fonctions linéaires, et, en général, distinctes, des précédents. Par suite l ne dépasse certainement pas l'ordre le plus élevé des invariants du *système complet*.

On n'est arrêté, dans ces opérations, que si la formation des invariants jusqu'à l'ordre l devient impossible, ou si les paramètres différentiels cessent d'être indépendants. Ceci ne se présente que dans le cas où M satisfait à des *équations invariantes bien déterminées*, cas que nous laisserons d'abord de côté.

6. Supposons maintenant, qu'une telle multiplicité *générale* M étant donnée, elle ait α invariants d'ordre σ, $J_1, J_2, \dots, J_\alpha$, s'exprimant en fonction des autres invariants d'ordre σ et d'ordre inférieur: $I_1, I_2, \dots, I_\beta$:

$$(11) \quad J_1 - \varphi_1(I_1, I_2, \dots, I_\beta) = 0, \quad \dots, \quad J_\alpha - \varphi_\alpha(I_1, I_2 \dots, I_\beta) = 0.$$

Les multiplicités M', transformées de M, satisfont aux mêmes relations

$$(11') \quad J_1' - \varphi_1(I_1', I_2', \dots, I_\beta') = 0, \quad \dots, \quad J_\alpha' - \varphi_\alpha(I_1', I_2', \dots, I_\beta') = 0.$$

Or, au système d'invariants distincts $I_1, \dots, I_\beta$, $J_1, \dots, J_\alpha$, et à ceux qu'on en déduit $\Delta_1 J_1, \dots, \Delta_n J_\alpha$, on peut supposer substitué celui des invariants aussi distincts $I_1, \dots, I_\beta$, $J_1 - \varphi_1, \dots, J_\alpha - \varphi_\alpha$, et ceux qui s'en déduisent $\Delta_1(J_1 - \varphi_1), \dots, \Delta_n(J_\alpha - \varphi_\alpha)$. En vertu de (11), ces

derniers sont tous nuls sur M, de telle sorte que M' satisfait aux équations:

$$(12) \qquad \Delta'_\nu(J'_i - \varphi'_i) = 0. \qquad (\nu=1,2,\ldots,n) \quad (i=1,2,\ldots,a)$$

Mais ces équations sont satisfaites pour toute solution du système (11'), dont elles sont des conséquences par dérivation: en effet, le système (11') n'entrainant pas la dépendance des paramètres $\Delta'_\nu J'$, on sait que les équations (12), d'ordre $\sigma + 1$, forment un système équivalent à celui que l'on obtient en différentiant les équations (11').

D'après cela, si tous les invariants de M, d'un ordre λ, égal ou supérieur à l, sont tous fonctions des invariants d'ordre inférieur à λ, il suffit, pour exprimer que tous les invariants de M' satisfont aux mêmes relations que ceux de M, d'écrire les équations (11') jusqu'à l'ordre λ, équations parmi lesquelles il peut d'ailleurs y en avoir un certain nombre, qu'on sait reconnaître, de la forme:

$$\Delta'_\nu(J'_i - \varphi'_i) = 0$$

et qui sont des conséquences des autres par dérivation. Il en résulte, en égalant entre eux les invariants distincts $I_1, I_2, \ldots, I_\beta$, de M et M', que tous les invariants de M sont égaux respectivement à ceux de M'; et par suite, comme on l'a déjà établi, ces conditions sont suffisantes pour que M' soit homologue de M.

Quant à la correspondance entre M et l'une des solutions M' de ce système (11'), elle fait correspondre à un point quelconque de M, un point déterminé de M' ou une infinité de points, suivant que le nombre β des invariants distincts est égal ou inférieur à n: et, une fois fixé ce point de M', la correspondance est complètement déterminée.

Enfin, comme il y a au plus n invariants distincts, l'ordre λ, qui est au moins égal à l, est au plus égal à $l + n - 1$. En résumé:

Théorème II. *Dans le cas où une multiplicité à n dimensions admet relativement à un groupe de Lie, un nombre illimité d'invariants, on peut toujours construire et un système d'invariants d'un ordre minimum l, et un système de n paramètres différentiels, linéaires et homogènes, du premier ordre, qui, appliqués aux invariants précédents donnent tous ceux d'ordre supérieur.*

Les multiplicités M', homologues d'une multiplicité générale donnée, M, sont définies par un système d'équations aux dérivées partielles obtenu en exprimant que leurs invariants d'un ordre λ, au moins égal à l, et au plus à $l+n-1$, sont liés par les mêmes relations que ceux de M; et la ou les correspondances qui rattachent l'une d'elles à M s'obtiennent en égalant les invariants distincts de M aux invariants correspondants de M'.

7. Les multiplicités *particulières,* pour lesquelles ce qui précède ne s'applique pas, se partagent en un nombre fini de classes, chacune d'elles étant définie par un système bien déterminé d'équations invariantes. L'étude de chaque classe se fait, comme on l'a vu (2e partie, ch. I), de la même manière que celle des multiplicités générales. On est conduit à répéter sur elle les mêmes subdivisions, les multiplicités de cette classe possédant, les unes un *système d'invariants* que l'on saura former, les autres étant définies par de nouvelles *équations invariantes.* Pour ces dernières, il faut continuer de la même manière. Cette suite de subdivisions est d'ailleurs limitée, et on arrive nécessairement à des classes ne se partageant plus, et ayant ou n'ayant pas d'invariants: dans le cas contraire, on aurait en effet des multiplicités satisfaisant à des équations invariantes formant un système illimité d'équations aux dérivées partielles.

8. **Application.** La théorie des *surfaces applicables* nous donne une application des principes précédents, en même temps qu'un exemple de calcul d'invariants à l'aide des transformations infinitésimales. Nous considérons un ds^2, rapporté à ses *coordonnées symétriques:*

$$ds^2 = 2\lambda dx dy.$$

Cette forme n'est pas altérée par les transformations:

$$x' = X(x), \qquad y' = Y(y)$$

lesquelles forment un groupe de Lie, dont les transformations infinitésimales sont:

$$(13) \qquad \delta x = -\xi(x)\delta t, \qquad \delta y = -\eta(y)\delta t$$

où X et ξ sont des fonctions arbitraires de x seulement, Y et η de y seulement.

λ est une fonction de x et y, dont la transformation infinitésimale est donnée par l'équation:

$$0 = \frac{\delta\lambda}{\lambda} + \frac{\delta dx}{dx} + \frac{\delta dy}{dy} = \frac{\delta\lambda}{\lambda} + \frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy}$$

ou

(14) $$\delta\lambda = \lambda(\xi' + \eta')\delta t.$$

On a à chercher les invariants du groupe de transformations (13) et (14). Nous poserons, φ étant une fonction quelconque de x et y:

$$\varphi_{ij} = \frac{\partial^{i+j}\varphi}{\partial x^i \partial y^j}.$$

Les dérivées d'une telle fonction sont transformées de telle sorte que la relation:

$$d\varphi - \varphi_{10}dx - \varphi_{01}dy = 0$$

reste invariante, ce qui donne:

$$\delta\varphi_{10} = \frac{d}{dx}\delta\varphi + \varphi_{10}\xi'\delta t, \qquad \delta\varphi_{01} = \frac{d}{dy}\delta\varphi + \varphi_{01}\eta'\delta t$$

où $\frac{d}{dx}$ et $\frac{d}{dy}$ représentent des dérivées totales.

Pour l'ordre zéro, on a *l'équation invariante* $\lambda = 0$, dont la signification est banale. Nous supposons donc $\lambda \neq 0$, et posons $\lambda = e^{\omega}$, ce qui donne:

$$\delta\omega = (\xi' + \eta')\delta t,$$

$$\delta\omega_{10} = (\xi'' + \omega_{10}\xi')\delta t, \qquad \delta\omega_{01} = (\eta'' + \omega_{01}\eta')\delta t,$$

$$\delta\omega_{20} = (\xi''' + \omega_{10}\xi'' + 2\omega_{20}\xi')\delta t, \qquad \delta\omega_{02} = (\eta''' + \omega_{01}\eta'' + 2\omega_{02}\eta')\delta t,$$

$$\delta\omega_{11} = \omega_{11}(\xi' + \eta')\delta t,$$

d'où un premier invariant du second ordre (*courbure totale*):

$$\alpha = e^{-\omega}\omega_{11} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\log\lambda.$$

Pour les ordres supérieurs, nous ne conservons, des dérivées de ω, que celles de la forme ω_{n0} et ω_{0n}, et substituons aux autres les dérivées de α. Ceci donne, pour le troisième ordre:

$$\partial\omega_{30} = (\xi^{\mathrm{IV}} + \omega_{10}\xi''' + \ldots)\partial t, \qquad \partial\omega_{03} = (\eta^{\mathrm{IV}} + \omega_{01}\eta''' + \ldots)\partial t,$$

$$\partial\alpha_{10} = \alpha_{10}\xi'\partial t, \qquad \partial\alpha_{01} = \alpha_{01}\eta'\partial t.$$

Les coefficients de $\xi', \ldots, \xi^{\mathrm{IV}}, \eta', \ldots, \eta^{\mathrm{IV}}$ donnent ainsi, pour la détermination des invariants, jusqu'au 3[me] ordre, un système de 8 équations à 10 inconnues; ces équations sont indépendantes, car elles se réduisent à:

$$(15)\quad \begin{gathered} 0 = \frac{\partial f}{\partial\omega_{30}} = \frac{\partial f}{\partial\omega_{03}} = \frac{\partial f}{\partial\omega_{20}} = \frac{\partial f}{\partial\omega_{02}} = \frac{\partial f}{\partial\omega_{10}} = \frac{\partial f}{\partial\omega_{01}}, \\ \frac{\partial f}{\partial\omega} + \omega_{11}\frac{\partial f}{\partial\omega_{11}} + \alpha_{10}\frac{\partial f}{\partial\alpha_{10}} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial\omega} + \omega_{11}\frac{\partial f}{\partial\omega_{11}} + \alpha_{01}\frac{\partial f}{\partial\alpha_{01}} = 0. \end{gathered}$$

Elle cessent d'être distinctes, seulement dans le cas de

$$\alpha_{10} = 0, \qquad \alpha_{01} = 0,$$

équations qui forment ainsi un *système invariant*. Elles définissent des surfaces particulières, savoir:

$$\alpha = \text{const.}$$

On voit immédiatement que ces surfaces n'ont pas d'autre invariant que α.

Pour les autres, on trouve deux invariants, α, et un autre:

$$\beta = e^{-\alpha}\alpha_{10}\alpha_{01}.$$

Pour le 4[me] ordre, il faudrait prolonger les équations (15), en y ajoutant les 5 éléments du 4[me] ordre, $\omega_{40}, \alpha_{20}, \alpha_{11}, \alpha_{02}, \omega_{04}$, ce qui laisse évidemment ces équations indépendantes, et leur ajouter les deux suivantes, provenant des coefficients de ξ^{V} et η^{V}:

$$\frac{\partial f}{\partial\omega_{40}} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial\omega_{04}} = 0$$

lesquelles sont indépendantes entre elles, et des précédentes. On trouverait donc 3 invariants du 4[me] ordre, et, de la même manière, $n - 1$ invariants du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Pour les déterminer, construisons d'abord les *paramètres différentiels.* J étant un invariant, on a:

$$\delta J_{10} = J_{10}\xi'\delta t, \qquad \delta J_{01} = J_{01}\eta'\delta t.$$

Nous prendrons les deux paramètres:

$$\Delta_x J = e^{-\omega}\alpha_{01}J_{10}, \qquad \Delta_y J = \frac{J_{01}}{\alpha_{01}}$$

qui ne sont pas symétriques, mais qui tombent en défaut seulement dans le cas de $\alpha_{01} = 0$: dans ce cas, il suffirait de recourir aux paramètres analogues $e^{-\omega}\alpha_{10}J_{01}$ et $\frac{J_{10}}{\alpha_{10}}$.

Nous remarquerons que:

$$\Delta_x \Delta_y J - \Delta_y \Delta_x J = -e^{-\omega}\left[\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{01}} J_{01} + \left(\frac{\alpha_{02}}{\alpha_{01}} - \omega_{01}\right) J_{10}\right]$$

$$= -e^{-\omega}\alpha_{11}\Delta_y J - \frac{\alpha_{02} - \alpha_{01}\omega_{01}}{\alpha_{01}^2}\Delta_x J,$$

ce qui met en évidence deux invariants du 4me ordre:

$$\gamma = \frac{\alpha_{02} - \alpha_{01}\omega_{01}}{\alpha_{01}^2}, \qquad \theta = e^{-\omega}\alpha_{11}.$$

On en connaît, en outre, deux autres:

$$\Delta_x\beta = e^{-2\omega}\alpha_{01}(\alpha_{20}\alpha_{01} + \alpha_{11}\alpha_{10} - \omega_{10}\alpha_{10}\alpha_{01}),$$

$$\Delta_y\beta = e^{-\omega}\left(\alpha_{11} + \frac{\alpha_{02}\alpha_{10}}{\alpha_{01}} - \omega_{01}\alpha_{10}\right),$$

lesquels sont liés aux précédents, comme cela doit être, par une relation:

$$\theta = \Delta_y\beta - \beta\gamma.$$

On a ainsi 3 invariants du 4me ordre, $\Delta_x\beta$, $\Delta_y\beta$ et γ qui constituent des fonctions distinctes, respectivement, de α_{20}, α_{11}, et α_{02}. Leurs dérivées du $q^{\text{ième}}$ ordre donnent $q + 3$ fonctions distinctes des $q + 3$ dérivées d'ordre $q + 2$ de α; en répétant sur elles, une ou plusieurs fois, les opérations $\Delta_x J$ et $\Delta_y J$, on formera donc $q + 3$ invariants distincts d'ordre

$q+4$, c'est-à-dire, tous les invariants d'ordre supérieur à 4; le nombre l est ici égal à 4.

Cela posé, considérons d'abord une surface *générale* M, qui n'annule donc pas α_{01} (ce cas se traiterait de la même manière). Si ses invariants α et β sont distincts, les invariants du 4[me] ordre $\Delta_x\beta$, $\Delta_y\beta$, γ seront fonctions de α et β:

$$(16) \qquad \Delta_x\beta = f_1(\alpha, \beta), \qquad \Delta_y\beta = f_2(\alpha, \beta), \qquad \gamma = f_3(\alpha, \beta).$$

Toute surface M', transformée de M, est alors définie par les équations (16) qui suffisent, et les correspondances, en nombre fini, entre M et M' sont données par:

$$\alpha' = \alpha, \qquad \beta' = \beta.$$

La troisième équation (16) est, au reste, une conséquence des deux précédentes, en vertu de l'identité:

$$\Delta_y\Delta_x\beta - \Delta_x\Delta_y\beta = \gamma.\Delta_x\beta + \theta.\Delta_y\beta = (\Delta_y\beta)^2 + \gamma(\Delta_x\beta - \beta\Delta_y\beta)$$

qui donne f_3 connaissant f_1 et f_2, car l'expression:

$$\Delta_x\beta - \beta\Delta_y\beta = e^{-\omega}(\alpha_{01}\beta_{10} - \alpha_{10}\beta_{01})$$

ne s'annule que si α et β ne sont pas distincts.

Si M est telle que β et α ne soient pas distincts:

$$(17) \qquad \beta = f(\alpha)$$

$\Delta_x\beta$ et $\Delta_y\beta$ sont aussi fonctions de α:

$$\Delta_x\beta = f(\alpha).f'(\alpha), \qquad \Delta_y\beta = f'(\alpha)$$

et il en est de même des 3 invariants du 5[me] ordre, $\Delta_x\Delta_x\beta$, $\Delta_y\Delta_x\beta$, $\Delta_y\Delta_y\beta$. Si γ est distinct de α, le 4[me] invariant du 5[me] ordre, $\Delta_y\gamma$, est alors fonction de α et γ:

$$(18) \qquad \Delta_y\gamma = \varphi(\alpha, \gamma).$$

Les multiplicités (M') sont, dans ce cas, définies par les équations (17) et (18), la correspondance étant donnée par

$$\alpha' = \alpha, \qquad \gamma' = \gamma.$$

Si, en même temps que β, γ est fonction de α:

(19) $$\gamma = \psi(\alpha)$$

les 3 invariants du 4me ordre sont fonctions de α; M' est définie par les équations (17) et (19). Ici, il y a une infinité de correspondances données par la seule relation

$$\alpha' = \alpha,$$

un point x_0, y_0 de M pouvant correspondre à tout point x', y' de M' satisfaisant à l'équation

$$\alpha'(x', y') = \alpha(x_0, y_0).$$ [1]

TROISIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

Calcul des invariants. Formes réduites.

1. Le calcul des invariants peut être facilité souvent par l'application d'une nouvelle notion, celle de *forme réduite d'une multiplicité,* relativement à un groupe de LIE.

Considérons un élément particulier E_0 d'une multiplicité M, c'est-à-dire, un système de valeurs $z_1^{00}, \ldots, z_{\rho_0}^{00}, z_1^{10}, \ldots, z_{\rho_1}^{10}, \ldots, z_1^{K0}, \ldots, z_{\rho_K}^{K0}, \ldots$, des variables indépendantes, des fonctions et de leurs dérivées; et re-

[1] Si l'on admet, ce qu'on verra dans la suite, que les invariants considérés sont les mêmes que ceux que l'on aurait, en prenant un ds^2 sous sa forme générale

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

on retrouve ici la solution du problème suivant: reconnaître si deux surfaces sont applicables. Cf. DARBOUX, *Théorie générale des surfaces,* t. III, liv. VII, chap. II.

gardons un invariant comme une fonction de ces coordonnées, telle, que la même fonction des coordonnées d'un élément E_0', transformé de E_0, quand on soumet M à une transformation du groupe, ait la même valeur. Les coordonnées de E_0', étant définies par les relations:

$$(C^0) \quad z_i'^{K0} = \varpi_i^K(z_1^{00}, \dots, z_{\rho_0}^{00}, \dots, z_1^{K0}, \dots, z_{\rho_K}^{K0}, \lambda_1^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \dots, \lambda_1^K, \dots, \lambda_{\varepsilon_K}^K) \quad {\scriptstyle (K=1,2,\dots) \quad (i=1,2,\dots,\rho_K)}$$

où les λ sont des paramètres arbitraires, on peut choisir ces paramètres de façon que certaines des coordonnées de E_0', $z_{\mu_0+1}'^{00}, \dots, z_{\rho_0}'^{00}, z_{\mu_1+1}'^{10}, \dots, z_{\rho_1}'^{10}, \dots, z_{\mu_K+1}'^{K0}, \dots, z_{\rho_K}'^{K0}, \dots,$ prennent des valeurs fixes arbitraires, $c_{\mu_0+1}^0, \dots, c_{\rho_0}^0; c_{\mu_1+1}^1, \dots, c_{\rho_1}^1, \dots, c_{\mu_K+1}^K, \dots, c_{\rho_K}^K, \dots,$ pourvu au moins que, soit les coordonnées de E_0, soit ces constantes arbitraires, ne satisfassent pas à certaines équations invariantes: cette exception ne pourrait se présenter que soit dans le cas où M serait une *multiplicité particulière,* soit, dans le cas contraire, pour des points particuliers de M. Les autres coordonnées de E_0', sont alors complètement déterminées:

$$z_i'^{K0} = G_i^K(z_1^{00}, \dots, z_{\rho_0}^{00}, \dots, z_1^{K0}, \dots, z_{\rho_K}^{K0}, c_{\mu_0+1}^0, \dots, c_{\rho_0}^0, \dots, c_{\mu_K+1}^K, \dots, c_{\rho_K}^K) \quad {\scriptstyle (K=1,2,\dots) \quad (i=1,2,\dots \mu_K)}$$

et leurs valeurs, fonctions des coordonnées de E_0 sont les invariants cherchés. C'est, en effet, la marche que nous avons suivie pour former ces invariants. C'est ce qui résulte aussi de la remarque suivante.

Soit $\mathcal{E}_0$, l'élément transformé de E_0, *élément réduit,* caractérisé par les valeurs constantes $c_{\mu_0+1}^0, \dots, c_{\rho_0}^0, \dots, c_{\mu_K+1}^K, \dots, c_{\rho_K}^K, \dots$ de certaines de ses coordonnées. La transformation T qui donne

$$E_0 T = \mathcal{E}_0$$

est bien déterminée, et unique au moins dans un domaine fini; elle serait déterminée jusqu'à l'ordre K seulement, si les valeurs des constantes c n'étaient fixées que jusqu'à cet ordre K.

Soit E_0' un élément déduit de E_0 par une transformation quelconque $\mathfrak{T}$; il lui correspond un *élément réduit,* $\mathcal{E}_0'$, et une transformation, T', bien déterminée, telle que:

$$E_0' T' = \mathcal{E}_0'$$

On a donc:

$$E_0\,\mathfrak{T}T' = \mathcal{E}'_0.$$

La transformation $\mathfrak{T}T'$ qui fait de E_0 un élément réduit doit donc se confondre avec T (au moins jusqu'à l'ordre K), et $\mathcal{E}'_0$ se confondre de même avec $\mathcal{E}_0$. Les coordonnées non arbitraires de $\mathcal{E}'_0$ ou $\mathcal{E}_0$ s'exprimant de la même manière en fonctions de celles de E'_0 pour le premier, de E_0 pour le second, ces fonctions sont donc bien des invariants.

Ceci montre en outre que, réciproquement, si à un élément E_0 de M correspond un élément réduit $\mathcal{E}_0$, de forme définie, et déduit de E_0 par une transformation *bien déterminée* du groupe, les coordonnées non arbitraires de $\mathcal{E}_0$ sont des invariants, fonctions des coordonnées de E_0. De plus, ces invariants qui, pour

$$z^0_{\mu_0+1} = c^0_{\mu_0+1}, \quad \ldots, \quad z^0_{\rho_0} = c^0_{\rho_0}, \qquad z^1_{\mu_1+1} = c^1_{\mu_1+1}, \quad \ldots, \quad z^1_{\rho_1} = c^1_{\rho_1}, \quad \ldots,$$

se réduisent à $z^0_1, \ldots, z^0_{\mu_0}, z^1_1, \ldots, z^1_{\mu_1}$ sont manifestement distincts: considérés comme solutions du système complet formé à l'aide des transformations infinitésimales, ils constituent un système de *solutions principales* de ce système complet.

Dans le cas où E_0 satisfait à une équation invariante qui ne permet plus la réduction à la forme $\mathcal{E}_0$, il en est de même des éléments transformés E'_0. Alors, il y aura une forme réduite nouvelle, distincte de la précédente, chacune des équations ou systèmes d'équations invariantes qui définissent les multiplicités particulières pouvant correspondre à une forme réduite bien déterminée. Par conséquent:

Théorème I. *A tout groupe de Lie, on peut faire correspondre, pour une multiplicité de dimensions données, un nombre limité de formes réduites, telles que tout élément E_0 d'une telle multiplicité puisse se mettre, à l'aide d'une transformation bien déterminée du groupe, sous l'une de ces formes réduites. Les coordonnées de l'élément réduit $\mathcal{E}_0$ sont, les unes, égales à des constantes fixes, les autres des invariants, fonctions des coordonnées de l'élément initial E_0.*

2. Par exemple, étant donnée une surface, on peut, en effectuant sur elle une transformation bien déterminée du groupe des mouvements:

$$p\,,\; q\,,\; r\,,\; yr - zq\,,\; zp - xr\,,\; xq - yp$$

transporter l'un quelconque de ses points à l'origine, son équation dans le voisinage de ce point étant:

$$z = \frac{a_{20}}{2}x^2 + \frac{a_{02}}{2}y^2 + \frac{a_{30}}{6}x^3 + \frac{a_{21}}{2}x^2y + \frac{a_{12}}{2}xy^2 + \frac{a_{03}}{6}y^3 + \dots.$$

Les coefficients de cette forme réduite sont les valeurs des invariants de la surface, en ce point; en particulier, a_{20} et a_{02} sont les inverses des deux rayons de courbure. Cette réduction se fait en transportant le trièdre des coordonnées, sur le trièdre formé par la normale à la surface, et ses deux directions principales en ce point. Elle tombe donc en défaut, dans le cas où ce trièdre s'évanouit, c'est-à-dire, soit lorsque la normale est tangente à la surface, soit lorsque les deux directions principales sont confondues: de là deux classes de *multiplicités particulières,* les unes, les développables circonscrites au cercle de l'infini, définies par l'équation invariante:

$$1 + p^2 + q^2 = 0,$$

les autres, les surfaces réglées dont les génératrices sont les droites isotropes, et dont l'équation est:

$$\begin{aligned}[rpq(1 + q^2) - 2s(1 + p^2)(1 + q^2) + tpq(1 + p^2)]^2 \\ + (1 + p^2 + q^2)[r(1 + q^2) - t(1 + p^2)]^2 = 0.\end{aligned}$$

3. La méthode peut être généralisée. Supposons qu'à l'aide d'une transformation du groupe, non pas nécessairement unique, cette fois, on puisse mettre un élément arbitraire E_0 de M sous une forme réduite $\mathcal{E}_0$, caractérisée par les valeurs fixes $c^0_{\nu_0+1}, \dots, c^0_{\rho_0}, c^1_{\nu_1+1}, \dots, c^1_{\rho_1}, \dots$ que prennent respectivement ses coordonnées $z^0_{\nu_0+1}, \dots, z^0_{\rho_0}, z^1_{\nu_1+1}, \dots, z^1_{\rho_1}, \dots$. Les autres coordonnées, $z^0_1, \dots, z^0_{\nu_0}, z^1_1, \dots, z^1_{\nu_1}, \dots$ de $\mathcal{E}_0$ sont fonctions des coordonnées de l'élément initial E_0, et les invariants cherchés sont fonctions de ces seules quantités. Pour les obtenir, il suffit d'achever la réduction de l'élément à une forme réduite bien déterminée, en tenant compte seulement des valeurs constantes déjà attribuées à certaines coordonnées. On posera donc, dans les équations (C^0):

$$\begin{aligned}
z'^{00}_{\nu_0+1} &= z^{00}_{\nu_0+1} = c^0_{\nu_0+1}, \quad \dots, \quad z'^{00}_{\rho_0} = z^{00}_{\rho_0} = c^0_{\rho_0}, \\
z'^{10}_{\nu_1+1} &= z^{10}_{\nu_1+1} = c^1_{\nu_1+1}, \quad \dots, \quad z'^{10}_{\rho_1} = z^{10}_{\rho_1} = c^1_{\rho_1}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

puis on achèvera de déterminer les paramètres λ, en attribuant à de nouvelles coordonnées $z'^{00}_{\mu_0+1}, \ldots, z'^{00}_{\nu_0}, z'^{10}_{\mu_1+1}, \ldots, z'^{10}_{\nu_1}, \ldots$ des valeurs constantes: on exprime ainsi les autres coordonnées $z'^{00}_1, \ldots, z'^{00}_{\mu_0}, z'^{10}_1, \ldots, z'^{10}_{\mu_1}, \ldots$ en fonction de $z^{00}_1, \ldots, z^{00}_{\nu_0}, z^{10}_1, \ldots, z^{10}_{\nu_1}, \ldots$, et ces expressions sont les invariants cherchés; la transformation qui ramène E_0 à la dernière forme réduite est en effet unique.

4. Ce procédé est intéressant dans le cas où la forme intermédiaire $\mathcal{E}_0$ a elle-même pour coordonnées les invariants d'un sous-groupe du groupe proposé. On obtient alors les invariants du groupe général, exprimés en fonction de ceux du sous-groupe.

On peut arriver au même résultat à l'aide des transformations infinitésimales, la méthode s'appliquant d'ailleurs à un système complet quelconque d'équations linéaires aux dérivées partielles.

Soit donc un système complet

$$(1) \qquad X_1 f = 0, \quad \ldots, \quad X_h f = 0, \qquad X_{h+1} f = 0, \quad \ldots, \quad X_n f = 0$$

de n équations linéaires aux dérivées partielles, à r variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Nous supposons que les h premières forment elles-mêmes un système complet dont on connaît les solutions principales $x'_{h+1}, \ldots, x'_r$, qui se réduisent à $x_{h+1}, \ldots, x_r$, pour

$$x_1 = x_1^0, \quad \ldots, \quad x_h = x_h^0.$$

Pour achever l'intégration de (1), nous prenons comme nouvelles variables $x_1, \ldots, x_h, x'_{h+1}, \ldots, x'_r$, et alors le système complet devient:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0,$$

$$(2) \qquad X_i f = X_i x'_{h+1} \frac{\partial f}{\partial x'_{h+1}} + X_i x'_{h+2} \frac{\partial f}{\partial x'_{h+2}} + \ldots + X_i x'_r \frac{\partial f}{\partial x'_r} = 0 \quad (i=h+1,\ldots,n)$$

où les coefficients des dernières équations sont supposés exprimés en fonction de $x_1, \ldots, x_h, x'_{h+1}, \ldots, x'_r$. Si on résout les dernières équations, par rapport à $\frac{\partial f}{\partial x'_{h+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x'_n}$, par exemple, le système devient *jacobien*, de telle sorte que ses coefficients sont alors indépendants de $x_1, \ldots, x_h$. Le

résultat de cette résolution ne change donc pas si on remplace dans (2), $x_1, \ldots, x_h$ par des constantes, en particulier par $x_1^0, \ldots, x_h^0$. Soit:

$$X_i x'_k = \varphi_{ik}(x_1, \ldots, x_h, x'_{h+1}, \ldots, x'_r) = \psi_{ik}(x_1, \ldots, x_h, x_{h+1}, \ldots, x_r).$$

Cette substitution donne identiquement:

$$\varphi_{ik}(x_1^0, \ldots, x_h^0, x'_{h+1}, \ldots, x'_r) = \psi_{ik}(x_1^0, \ldots, x_h^0, x'_{h+1}, \ldots, x'_r),$$

et on remplace le système (2) par un système équivalent en substituant à tout coefficient $X_i x'_k$ l'expression $\psi_{ik}(x_1^0, \ldots, x_h^0, x'_{h+1}, \ldots . x'_r)$, laquelle s'obtient simplement en calculant $X_i x'_k$ en fonction de $x_1, \ldots, x_h, x_{h+1}, \ldots, x_r$, et y faisant ensuite:

$$x_1 = x_1^0, \quad \ldots, \quad x_h = x_h^0, \qquad x_{h+1} = x'_{h+1}, \quad \ldots, \quad x_r = x'_r.$$

Les dernières équations (2) forment alors un système complet par rapport aux seules variables $x'_{h+1}, \ldots, x'_r$, dont les solutions sont les intégrales de (1), exprimées en fonction de $x'_{h+1}, \ldots, x'_r$.

5. L'application de la méthode peut être facilitée dans certains cas. Elle consiste à effectuer sur l'élément intermédiaire $\mathcal{E}_0$, une transformation qui n'altère pas ses coordonnées constantes:

$$(3) \quad z^0_{\nu_0+1} = c^0_{\nu_0+1}, \quad \ldots, \quad z^0_{\rho_0} = c^0_{\rho_0}, \qquad z^1_{\nu_1+1} = c^1_{\nu_1+1}, \quad \ldots, \quad z^1_{\rho_1} = c^1_{\rho_1}, \quad \ldots$$

En général, la transformation générale jouissant de cette propriété dépend des autres coordonnées $z_1^{00}, \ldots, z_{\nu_0}^{00}, z_1^{10}, \ldots, z_{\nu_1}^{10}, \ldots$ de $\mathcal{E}_0$: dans le cas contraire, elle appartient nécessairement à un groupe Γ, sous-groupe du proposé G. Tout revient donc, dans ce cas, à faire une dernière réduction de la forme intermédiaire $\mathfrak{M}$, par une transformation de Γ, c'est-à-dire, à déterminer les invariants des multiplicités $\mathfrak{M}$, par rapport au groupe Γ.

C'est ce qui résulte aussi du raisonnement suivant. — Si S est la transformation générale de Γ, et T_0 une transformation particulière mettant une multiplicité donnée M sous la forme $\mathfrak{M}$, la transformation générale de G qui donne la même réduction est $T_0 S$. Tout invariant de

$\mathfrak{M}$ par rapport à Γ, exprimé en fonction des coordonnées de M, est alors nécessairement indépendant des arbitraires de cette transformation $T_0 S$, puisqu'il garde la même valeur, quelle que soit la multiplicité réduite $\mathfrak{M}$ à laquelle on ait ramené M; c'est donc une fonction bien déterminée des coordonnées de M, et, par suite, il constitue un invariant de M par rapport au groupe G.

Réciproquement, tout invariant de M par rapport au groupe G, exprimé en fonction des coordonnées d'une multiplicité $\mathfrak{M}$, donne évidemment un invariant de $\mathfrak{M}$ par rapport au groupe Γ, et les invariants distincts sont les mêmes, toute relation qu'il y a entre eux sous la forme $\mathfrak{M}$, subsistant quand on revient à la forme M.

Par exemple, un ds^2,

$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2 \tag{4}$$

peut toujours, à l'aide d'une transformation convenable du groupe G:

$$x' = X(x, y), \qquad y' = Y(x, y),$$

où X et Y sont des fonctions arbitraires de x et y, se mettre sous la forme:

$$ds^2 = 2\lambda dxdy \tag{5}$$

et la transformation générale de G qui conserve cette forme réduite de ds^2, est indépendante de λ et constitue un sous-groupe Γ de G:

$$x' = \Xi(x), \qquad y' = H(y),$$

où Ξ est une fonction arbitraire de x seulement, et H de y seulement. Tout invariant de la forme (5) par rapport au groupe Γ donne donc un un invariant de la forme (4) par rapport au groupe G; et on obtient tous ces derniers invariants de cette manière.

CHAPITRE II.

Invariants d'une surface par rapport aux transformations conformes et aux transformations projectives de l'espace.

1. Appliquons ces principes à la recherche des invariants d'une surface, définie par une fonction z de x et y, par rapport au groupe G_{10} des *transformations conformes* de l'espace:

$$(G_{10})\quad \boxed{\begin{array}{c} p\,,\ q\,,\ r\,,\ zq-yr\,,\ xr-yp\,,\ yp-xq, \\ U,\ 2xU-(x^2+y^2+z^2)p\,,\ 2yU-(x^2+y^2+z^2)q\,,\ 2zU-(x^2+y^2+z^2)r \end{array}}$$

avec:

$$U = xp + yq + zr.$$

Les six premières transformations forment le groupe G_6 des mouvements de l'espace; à l'aide d'une transformation de ce groupe, on peut, avons-nous vu, transporter un point quelconque de la surface à l'origine, l'équation de la surface ayant la forme:

$$(1)\qquad z = \frac{a_{20}x^2 + a_{02}y^2}{2} + \frac{a_{30}}{6}x^3 + \frac{a_{21}}{2}x^2y + \frac{a_{12}}{2}xy^2 + \frac{a_{03}}{6}y^3 + \dots$$

où les coefficients sont les valeurs des invariants du groupe G_6, au point considéré. Ceci devient impossible dans deux cas particuliers, définis chacun par une équation invariante, qui est aussi *équation invariante* de G_{10}. Nous laisserons ces deux cas de côté.

La transformation conforme n'altérant pas les lignes de courbure, la transformation générale de G_{10} qui n'altère pas la forme de l'équation (1) est indépendante des coefficients de (1). Elle forme effectivement un

groupe G_4, celui des 4 dernières transformations de G_{10}. Sa transformation infinitésimale est:

$$\begin{aligned}\delta x &= [2x(ax+by+cz+h) - a(x^2+y^2+z^2)]\,\delta t,\\ \delta y &= [2y(ax+by+cz+h) - b(x^2+y^2+z^2)]\,\delta t,\\ \delta z &= [2z(ax+by+cz+h) - c(x^2+y^2+z^2)]\,\delta t,\end{aligned}$$

où a, b, c, h sont des paramètres arbitraires.

L'équation (1) étant:

$$z = f(x, y),$$

l'équation de la surface transformée est:

$$z - \delta z = f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}\delta x - \frac{\partial f}{\partial y}\delta y,$$

ou, en s'arrêtant aux termes du premier ordre en δt:

$$z = f(x, y) + \delta t \left| 2(ax+by+cf+h)\left(f - x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}\right) + (x^2+y^2+f^2)\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} - c\right)\right|.$$

D'après cela, la transformation infinitésimale des coefficients de (1) est:

$$\begin{aligned}&\delta a_{20} + (2ha_{20} + 2c)\,\delta t = 0, && \delta a_{02} + (2ha_{02} + 2c)\,\delta t = 0,\\ &\delta a_{30} + 4ha_{30}\,\delta t = 0, && \delta a_{03} + 4ha_{03}\,\delta t = 0,\\ &\delta a_{21} + [4ha_{21} + 2b(a_{20} - a_{02})]\,\delta t = 0, && \delta a_{12} + [4ha_{12} + 2a(a_{02} - a_{20})]\,\delta t = 0.\end{aligned}$$

Elle met en évidence 1° une *équation invariante* du second ordre:

$$a_{20} - a_{02} = 0.$$

2° *deux invariants* du troisième ordre:

$$\frac{a_{30}}{(a_{20} - a_{02})^2}, \qquad \frac{a_{03}}{(a_{20} - a_{02})^2}.$$

L'équation invariante exprime que *la transformation conforme change un ombilic en ombilic.* Quand elle est satisfaite, les deux invariants du 3me ordre n'ont plus de sens.

Pour avoir la signification de ces invariants, déterminons, dans le voisinage de l'origine, les rayons de courbure de la surface. Ils sont donnés par l'équation:

$$\rho^2(s^2-rt)+\rho\sqrt{1+p^2+q^2}\,[r(1+q^2)+t(1+p^2)-2spq]-(1+p^2+q^2)^2=0,$$

qui, aux termes du second ordre près, se réduit ici à:

$$-\rho^2 rt+\rho(r+t)-1=0,$$

ce qui donne pour chacun des rayons de courbure:

$$\rho_1=\frac{1}{r}=\frac{1}{a_{20}}-\frac{a_{30}x+a_{21}y}{a_{20}^2}+\ldots$$

$$\rho_2=\frac{1}{t}=\frac{1}{a_{02}}-\frac{a_{12}x+a_{03}y}{a_{02}^2}+\ldots.$$

Désignons par s_1 l'arc de la ligne de courbure suivant laquelle la sphère osculatrice de rayon ρ_1 touche la surface, par s_2 celui de la seconde ligne de courbure. On a:

$$s_1=x+\ldots \qquad s_2=y+\ldots$$

et, par suite, à l'origine, on a:

$$a_{20}=\frac{1}{\rho_1},\qquad a_{02}=\frac{1}{\rho_2},$$

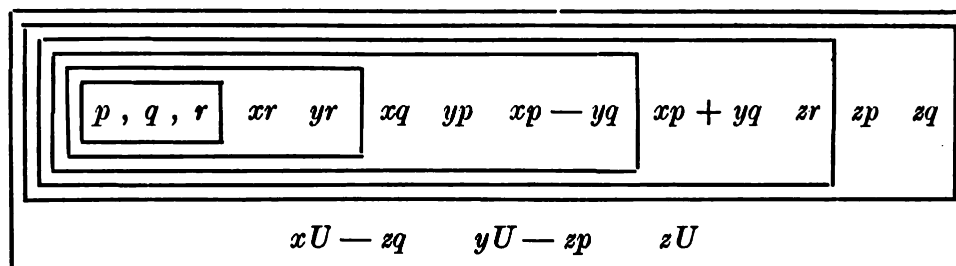
$$a_{30}=-\frac{1}{\rho_1^2}\frac{\partial\rho_1}{\partial s_1},\qquad a_{03}=-\frac{1}{\rho_2^2}\frac{\partial\rho_2}{\partial s_2},\qquad a_{21}=-\frac{1}{\rho_1^2}\frac{\partial\rho_1}{\partial s_2},\qquad a_{12}=-\frac{1}{\rho_2^2}\frac{\partial\rho_2}{\partial s_1},$$

et les deux invariants obtenus sont, au signe près:

$$\frac{\rho_2^2\dfrac{\partial\rho_1}{\partial s_1}}{(\rho_1-\rho_2)^2},\qquad \frac{\rho_1^2\dfrac{\partial\rho_2}{\partial s_2}}{(\rho_1-\rho_2)^2}.$$

La même méthode conduit à 5 invariants du 4me ordre, dont le calcul est, jusqu'à présent, sans intérêt.

2. On peut, de la même manière, construire les invariants d'une surface par rapport au *groupe des transformations projectives.* On peut, en effet, décomposer les transformations du groupe en sous-groupes s'emboîtant les uns dans les autres, suivant ce tableau:



A chacun de ces groupes correspond, comme on le verra, une forme réduite bien déterminée, la transformation générale du groupe suivant qui n'altère pas les caractères de cette forme réduite, étant indépendante des coefficients qui y figurent.

1°. D'abord, une transformation du groupe $\boxed{p\,,\ q\,,\ r}$, permet de transporter un point quelconque x_0, y_0, z_0 de la surface à l'origine, ce qui met son équation sous la forme:

(2) $$z = z_{10}x + z_{01}y + \ldots + \frac{z_{hk}}{h!\,k!}x^h y^k + \ldots$$

où z_{hk} représente la valeur, en ce point, de la dérivée $\frac{\partial^{h+k}z}{\partial x^h \partial y^k}$.

2°. $\boxed{xr \quad yr}$. En posant:

$$z' = z - z_{10}x - z_{01}y$$

on obtient la forme réduite:

(3) $$z = \frac{z_{20}}{2}x^2 + z_{11}xy + \frac{z_{02}}{2}y^2 + \ldots + \frac{z_{hk}}{h!\,k!}x^h y^k + \ldots.$$

On voit par là que tout invariant est indépendant de x, y, z, et des dérivées premières z_{10}, z_{01}.

3°. $\boxed{xq \quad yp \quad xp - yq}$. On détermine la transformation:

$$x = lx' + my', \qquad (lm_1 - ml_1 = 1)$$
$$y = l_1x' + m_1y',$$

de façon à annuler les termes en x'^2 et y'^2. On pose donc:

$$l_1 = \lambda l, \qquad m_1 = \mu m,$$

λ et μ étant les racines de l'équation:

$$z_{20} + 2z_{11}u + z_{02}u^2 = 0,$$

ce qui tombe en défaut, lorsque ces racines sont égales, c'est-à-dire, pour:

$$z_{11}^2 - z_{20}z_{02} = 0,$$

équation invariante des *surfaces développables.*

Si on écrit l'équation (3):

$$z = \frac{1}{2}\varphi_2(x, y) + \frac{1}{1.2.3}\varphi_3(x, y) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots p}\varphi_p(x, y) + \ldots,$$

φ_p étant une fonction homogène de degré p, l'équation devient, par la transformation

$$z = \sum_{p \geq 2} \frac{1}{1.2\ldots p}\varphi_p(lx' + my', l_1x' + m_1y')$$

ou

$$z = \sum_{h+k \geq 2} \frac{\alpha_{hk}}{h!\,k!} l^h m^k x'^h y'^k$$

en posant:

$$\alpha_{hk} = \frac{h!}{(h+k)!}[\varphi'_{h+k,x}(1, \lambda) + \mu\varphi'_{h+k,y}(1, \lambda)]_{(k)}$$

$$= \frac{k!}{(h+k)!}[\varphi'_{h+k,x}(1, \mu) + \lambda\varphi'_{h+k,y}(1, \mu)]_{(h)}.$$

Dans cette forme, l et m satisfont à la relation:

$$lm(\mu - \lambda) = 1.$$

On achève de les déterminer en égalant entre eux les coefficients de x'^3 et y'^3, ce qui donne:

$$\alpha_{30} l^3 = \alpha_{03} m^3,$$

d'où:

$$l = \alpha_{03}^{\frac{1}{6}} \alpha_{30}^{-\frac{1}{6}} (\mu - \lambda)^{-\frac{1}{2}}, \qquad m = \alpha_{30}^{\frac{1}{6}} \alpha_{03}^{-\frac{1}{6}} (\mu - \lambda)^{-\frac{1}{2}},$$

ce qui tombe en défaut dans le cas où l'une des quantités α_{30} et α_{03} est nulle, c'est-à-dire lorsque les équations:

$$z_{20} + 2z_{11} u + z_{02} u^2 = 0,$$
$$z_{30} + 3z_{21} u + 3z_{12} u^2 + z_{03} u^3 = 0,$$

ont une racine commune. C'est le cas des *surfaces réglées.*

Sauf dans ces deux cas d'exception, l'équation se met donc sous la forme:

$$z = \frac{\alpha_{11}}{\mu - \lambda} xy + \frac{\alpha_{30}^{\frac{1}{2}} \alpha_{03}^{\frac{1}{2}}}{(\mu - \lambda)^{\frac{3}{2}}} \frac{x^3 + y^3}{6} + \frac{1}{2(\mu - \lambda)^{\frac{3}{2}}} \left(\alpha_{03}^{\frac{1}{6}} \alpha_{30}^{-\frac{1}{6}} \alpha_{21} x^2 y + \alpha_{30}^{\frac{1}{6}} \alpha_{03}^{-\frac{1}{6}} \alpha_{12} x y^2 \right)$$

(4)

$$+ \sum_{h+k \geq 4} \frac{\alpha_{30}^{\frac{k-h}{6}} \alpha_{03}^{\frac{h-k}{6}}}{(\mu - \lambda)^{\frac{h+k}{2}}} \frac{\alpha_{hk}}{h!\,k!} x^h y^k.$$

4°. $\boxed{xp + yq \quad zr}$. La transformation

$$x = \sigma x', \qquad y = \sigma y', \qquad z' = \tau z,$$

permet, en prenant:

$$\tau \sigma^2 \frac{\alpha_{11}}{\mu - \lambda} = 1, \qquad \tau \sigma^3 \frac{\alpha_{03}^{\frac{1}{2}} \alpha_{30}^{\frac{1}{2}}}{(\mu - \lambda)^{\frac{3}{2}}} = 1$$

d'amener les coefficients de xy et $\frac{x^3 + y^3}{6}$ à être égaux à l'unité, les cas

d'exception étant encore ceux qui viennent d'être signalés. De là la forme réduite:

$$(5)\qquad z = xy + \frac{x^3+y^3}{6} + \frac{a_{21}}{2}x^2y + \frac{a_{12}}{2}xy^2 + \sum_{h+k\geq 4}\frac{a_{hk}}{h!\,k!}x^hy^k = \varphi(x\,,y)$$

avec

$$a_{hk} = \alpha_{11}^{h+k-3}\,\alpha_{03}^{1-\frac{h+2k}{3}}\,\alpha_{30}^{1-\frac{2h+k}{3}}\,\alpha_{hk}\,.$$

5°. $\boxed{zp \quad zq}$. L'équation de la surface

$$z = \varphi(x\,,y)$$

devient, par la transformation infinitésimale précédente:

$$z = \varphi(x\,,y) - \left[fz\frac{\partial\varphi}{\partial x} - gz\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\partial t$$

où f et g sont des constantes arbitraires; ou, aux termes du second ordre en ∂t, près:

$$z = \varphi(x\,,y) - \varphi(x\,,y)\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial x} + g\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\partial t,$$

ce qui donne, pour les coefficients $a_{21}\,, a_{12}\,, \ldots$ la transformation infinitésimale:

$$\begin{aligned}
&\partial a_{21} + 2g\,\partial t = 0, && \partial a_{12} + 2f\partial t = 0,\\
&\partial a_{40} + 4g\,\partial t = 0, && \partial a_{04} + 4f\partial t = 0,\\
&\partial a_{31} + (4f + 6ga_{21})\,\partial t = 0, && \partial a_{13} + (4g + 6fa_{12})\,\partial t = 0,
\end{aligned}$$

$$\partial a_{22} + 6(fa_{21} + ga_{12})\,\partial t = 0.$$

Elle correspond aux transformations finies:

$$\begin{aligned}
&a'_{21} = a_{21} - 2g', && a'_{12} = a_{12} - 2f',\\
&a'_{40} = a_{40} - 4g', && a'_{04} = a_{04} - 4f',\\
&a'_{31} = a_{31} - 6g'a_{21} - 4f' + 6g'^2, && a'_{13} = a_{13} - 6f'a_{12} - 4g' + 6f'^2,
\end{aligned}$$

$$a'_{22} = a_{22} - 6(f'a_{21} + g'a_{12}) + 12f'g'.$$

En prenant

$$g' = \frac{a_{21}}{2}, \qquad f' = \frac{a_{12}}{2},$$

on met l'équation de la surface sous la forme:

(6) $$z = xy + \frac{x^3 + y^3}{6} + \sum_{h+k\geq 4} \frac{A_{hk}}{h!\,k!} x^h y^k$$

où les coefficients A constituent les *invariants de la surface par rapport au groupe des transformations linéaires,* les premiers coefficients ayant en particulier les valeurs suivantes:

$$A_{40} = a_{40} - 2a_{21}, \qquad A_{04} = a_{04} - 2a_{12},$$

$$A_{31} = a_{31} - \frac{3}{2}a_{21}^2 - 2a_{12}, \qquad A_{13} = a_{13} - \frac{3}{2}a_{12}^2 - 2a_{21},$$

$$A_{22} = a_{22} - 3a_{12}a_{21}.$$

6°. $\boxed{xU - zq \quad yU - zp \quad zU}$. Enfin, la transformation infinitésimale projective la plus générale qui n'altère pas la forme réduite (6):

$$z = \phi(x, y)$$

est indépendante des coefficients A. Elle forme donc un groupe et a pour expression:

$$\delta x = [x(lx + my + nz) - mz]\,\delta t, \qquad \delta y = [y(lx + my + nz) - lz]\,\delta t,$$

$$\delta z = z(lx + my + nz)\,\delta t,$$

où l, m, n sont des coefficients arbitraires. Elle transforme la surface (6) en la suivante:

$$z - \delta z = \phi(x, y) - \frac{\partial\phi}{\partial x}\delta x - \frac{\partial\phi}{\partial y}\delta y,$$

ou, aux termes près du second ordre en δt:

$$z = \phi(x, y) + \delta t \left\{ (lx + my + n\phi)\left(\phi - x\frac{\partial\phi}{\partial x} - y\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \phi\left(m\frac{\partial\phi}{\partial x} + l\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \right\}.$$

La transformation infinitésimale des A qui en résulte est:

$$\partial A_{40} + 4l\,\partial t = 0, \qquad \partial A_{04} + 4m\,\partial t = 0,$$
$$\partial A_{31} - 2m\,\partial t = 0, \qquad \partial A_{13} - 2l\,\partial t = 0,$$
$$\partial A_{22} + 4n\,\partial t = 0,$$

ce qui correspond à la transformation finie:

$$A'_{40} = A_{40} - 4l', \qquad A'_{04} = A_{04} - 4m',$$
$$A'_{31} = A_{31} + 2m', \qquad A'_{13} = A_{13} + 2l',$$
$$A'_{22} = A_{22} - 4n'.$$

En prenant:

$$m' = -\frac{A_{31}}{2}, \qquad l' = -\frac{A_{13}}{2}, \qquad n' = \frac{A_{22}}{4},$$

l'équation de la surface se met sous la forme:

$$(7) \qquad z = xy + \frac{1}{6}(x^3 + y^3) + \frac{1}{24}(\mathfrak{A}_{40}x^4 + \mathfrak{A}_{04}y^4) + \sum_{h+k\geq 5} \frac{\mathfrak{A}_{hk}}{h!\,k!} x^h y^k,$$

où les $\mathfrak{A}$ constituent les invariants de la surface par rapport au groupe projectif général. En particulier, on a deux invariants du 4me ordre, qui ont pour expressions:

$$\mathfrak{A}_{40} = A_{40} + 2A_{13} = a_{40} + 2a_{13} - 6a_{21} - 3a_{12}^2$$
$$= \alpha_{03}^{-\frac{4}{3}}\alpha_{30}^{-\frac{5}{3}}(\alpha_{11}\alpha_{03}\alpha_{40} + 2\alpha_{11}\alpha_{30}\alpha_{13} - 6\alpha_{30}\alpha_{03}\alpha_{21} - 3\alpha_{30}\alpha_{12}^2),$$
$$\mathfrak{A}_{04} = A_{04} + 2A_{31} = a_{04} + 2a_{31} - 6a_{12} - 3a_{21}^2$$
$$= \alpha_{30}^{-\frac{4}{3}}\alpha_{03}^{-\frac{5}{3}}(\alpha_{11}\alpha_{30}\alpha_{04} + 2\alpha_{11}\alpha_{03}\alpha_{31} - 6\alpha_{03}\alpha_{30}\alpha_{12} - 3\alpha_{03}\alpha_{21}^2).$$

3. On peut donner de ces deux invariants, l'interprétation suivante. Comparons la surface proposée à une *surface anharmonique:*

$$P_1^{\lambda_1} P_2^{\lambda_2} P_3^{\lambda_3} P_4^{\lambda_4} = 1 \qquad (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0)$$

où les P sont des fonctions linéaires indépendantes de x, y, z. Une telle surface, par une transformation projective convenable, peut se mettre sous la forme:

$$z = x^a y^b.$$

Elle dépend de 15 constantes arbitraires, et admet un groupe à deux paramètres de transformations projectives

$$\boxed{xp + azr, \qquad yq + bzr}$$

de sorte qu'elle admet *deux invariants*, lesquels sont précisément les constantes a et b. Effectivement, déterminons pour cette surface $z = x^a y^b$, les valeurs, en un point quelconque x et y, des deux invariants A_{40} et A_{04}.

Ici, on a:

$$z_{ij} = a(a-1)\ldots(a-i+1)\,b(b-1)\ldots(b-j+1)x^{a-i}y^{b-j},$$

de sorte que z_{ij} est de degré $a-i$ en x, $b-j$ en y. L'équation en u est:

$$\frac{a(a-1)}{x^2} + \frac{2ab}{xy}u + \frac{b(b-1)}{y^2}u^2 = 0,$$

de sorte que λ et μ sont de degré -1 en x et $+1$ en y. L'expression:

$$\alpha_{p0} = \varphi_p(1\,,\lambda) = z_{p0} + pz_{p-1,1}\lambda + \ldots$$

est de degré $a-p$ en x et b en y; et, pour une raison analogue, α_{hk} est de degré $a-h-k$ en x et b en y. Il en résulte que A_{40} et A_{04} sont de degré zéro en x et y, c'est-à-dire, qu'ils dépendent bien de a et b seulement.

Ceci montre qu'en tout point d'une surface quelconque S, il est en général possible de trouver une *surface anharmonique* Σ (plus précisement, un nombre limité de telles surfaces), qui soit osculatrice avec S, jusqu'aux éléments du 4me ordre. Les valeurs des deux invariants de S en ce point s'expriment en fonction des deux invariants de cette surface anharmonique Σ.

On a laissé de côté, dans cette analyse, deux classes de surfaces, les *surfaces développables* et les *surfaces réglées*. Les invariants des premières se ramènent à ceux des courbes gauches et ont été complètement déterminés par HALPHEN.[1]

---

[1] *Sur les invariants différentiels des courbes gauches,* Journal de l'école polytechnique, 47e cahier.

CHAPITRE III.

Equation $y'' = a_0 y'^3 - a_1 y'^2 + b_1 y' - b_0$.

1. L'équation

$$y'' = a_0 y'^3 - a_1 y'^2 + b_1 y' - b_0 \tag{1}$$

où a_0, a_1, b_1, b_0 sont des fonctions de x et y, a la propriété de conserver la même forme par une transformation ponctuelle quelconque. En particulier, si on considère x comme fonction de y, elle se transforme en:

$$x'' = b_0 x'^3 - b_1 x'^2 + a_1 x' - a_0,$$

ce qui revient à substituer les a aux b, et inversement, en même temps que l'on change x en y et inversement.

La transformation infinitésimale effectuée sur x et y, est ici:

$$\delta x = -\xi\,\delta t, \qquad \delta y = -\eta\,\delta t, \tag{2}$$

où ξ et η sont des fonctions arbitraires de x et y. Elle donne:

$$\frac{\delta y'}{\delta t} = -\frac{\partial\eta}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial y}\right) + y'^2\frac{\partial\xi}{\partial y}, \tag{3}$$

$$\frac{\delta y''}{\delta t} = -\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + y'\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}\right) - y'^2\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}\right)$$
$$+ y'^3\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + y''\left(2\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial y} + 3y'\frac{\partial\xi}{\partial y}\right).$$

La transformation infinitésimale des coefficients a et b est alors donnée par l'identité:

$$-\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + y'\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}\right) - y'^2\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}\right) + y'^3\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}$$
$$+ (a_0 y'^3 - a_1 y'^2 + b_1 y' - b_0)\left(2\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial y} + 3y'\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)$$
$$- (3a_0 y'^2 - 2a_1 y' + b_1)\left[-\frac{\partial\eta}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial y}\right) + y'^2\frac{\partial\xi}{\partial y}\right]$$
$$-\frac{\delta a_0}{\delta t}y'^3 + \frac{\delta a_1}{\delta t}y'^2 - \frac{\delta b_1}{\delta t}y' + \frac{\delta b_0}{\delta t} = 0,$$

ce qui donne:

$$\frac{\delta a_0}{\delta t} = a_0\left(2\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) - a_1\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2},$$

$$\frac{\delta a_1}{\delta t} = -3a_0\frac{\partial \eta}{\partial x} + a_1\frac{\partial \eta}{\partial y} - 2b_1\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\delta b_0}{\delta t} = b_0\left(2\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) - b_1\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\delta b_1}{\delta t} = -3b_0\frac{\partial \xi}{\partial y} + b_1\frac{\partial \xi}{\partial x} - 2a_1\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}.$$

Le calcul des accroissements des dérivées φ_x et φ_y d'une fonction φ de x et y se fait à l'aide des formules:

$$\frac{\delta \varphi_x}{\delta t} = \frac{d}{dx}\frac{\delta \varphi}{\delta t} + \varphi_x\frac{\partial \xi}{\partial x} + \varphi_y\frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad \frac{\delta \varphi_y}{\delta t} = \frac{d}{dy}\frac{\delta \varphi}{\delta t} + \varphi_x\frac{\partial \xi}{\partial y} + \varphi_y\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Pour les éléments du 1er ordre, on obtient ainsi:

$$\frac{\delta a_{0x}}{\delta t} = \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2} + \ldots, \qquad \frac{\delta a_{0y}}{\delta t} = \frac{\partial^3 \xi}{\partial y^3} + \ldots,$$

$$\frac{\delta b_{0y}}{\delta t} = \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y} + \ldots, \qquad \frac{\delta b_{0x}}{\delta t} = \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \ldots,$$

$$\frac{\delta a_{1x}}{\delta t} = \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial y^2} - 2\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial y} + \ldots, \qquad \frac{\delta a_{1y}}{\delta t} = \frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} - 2\frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2} + \ldots,$$

$$\frac{\delta b_{1y}}{\delta t} = \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial y} - 2\frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial y^2} + \ldots, \qquad \frac{\delta b_{1x}}{\delta t} = \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} - 2\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y} + \ldots.$$

On est conduit à poser:

$$\alpha_1 = a_{1y} + 2a_{0x}, \qquad 3\alpha = a_{1x} + 2b_{1y},$$

$$\beta_1 = b_{1x} + 2b_{0y}, \qquad 3\beta = b_{1y} + 2a_{1x}$$

et à substituer aux dérivées de a_1 et b_1, les quantités $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ et leurs dérivées, pour lesquelles on a:

$$\frac{\delta \alpha_1}{\delta t} = \frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} + \ldots, \qquad \frac{\delta \alpha}{\delta t} = -\frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial y^2} + \ldots,$$

$$\frac{\delta \beta_1}{\delta t} = \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + \ldots, \qquad \frac{\delta \beta}{\delta t} = -\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial y} + \ldots.$$

Il suffit même, pour avoir tous les éléments d'ordre supérieur, de considérer seulement les dérivées de a_{0y} et α_1 par rapport à y seulement, celles de b_{0x} et β_1 par rapport à x seulement, en considérant simultanément toutes les dérivées des autres éléments du premier ordre, $a_{0x}, b_{0y}, \alpha, \beta$.

Ceci montre que, dans tout invariant, les dérivées d'ordre supérieur figurent seulement sous la forme des dérivées d'une des deux expressions:

$$l = a_{0x^2} + \beta_y = \frac{\partial^2 a_0}{\partial x^2} + \frac{2}{3}\frac{\partial^2 a_1}{\partial x \partial y} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 b_1}{\partial y^2},$$

$$m = b_{0y^2} + \alpha_x = \frac{\partial^2 b_0}{\partial y^2} + \frac{2}{3}\frac{\partial^2 b_1}{\partial x \partial y} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2}$$

et on pourra, à partir du 3me ordre, considérer seulement les dérivées de a_{0x} par rapport à y, celles de b_{0y} par rapport à x, et introduire l et m et leurs dérivées.

On a:

$$\frac{\delta l}{\delta t} = a_0\left(2\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}\right) - a_1\frac{\partial^3\xi}{\partial x^2\partial y} - 2a_0\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\partial y} + \frac{2}{3}a_1\frac{\partial^3\eta}{\partial x\partial y^2} - \frac{4}{3}b_1\frac{\partial^3\xi}{\partial x\partial y^2}$$

$$- b_0\frac{\partial^3\xi}{\partial y^3} + \frac{1}{3}b_1\frac{\partial^3\xi}{\partial x\partial y^2} - \frac{2}{3}a_1\frac{\partial^3\eta}{\partial x\partial y^2} + \cdots$$

$$= -a_0\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3} - a_1\frac{\partial^3\xi}{\partial x^2\partial y} - b_1\frac{\partial^3\xi}{\partial x\partial y^2} - b_0\frac{\partial^3\xi}{\partial y^3} + \cdots .$$

d'où il résulte que, dans tout invariant, les quantités l et m ne figurent que par les combinaisons:

$$h = l + a_0\beta_1 - a_1\beta + b_1 a_{0x} + b_0 a_{0y},$$

$$k = m + b_0\alpha_1 - b_1\alpha + a_1 b_{0y} + a_0 b_{0x},$$

expressions que l'on peut maintenant substituer à l et m.

Le calcul complet des accroissements de h et k donne:

$$(4)\qquad \begin{aligned}\frac{\delta h}{\delta t} &= h\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + 2\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) - k\frac{\partial\xi}{\partial y},\\ \frac{\delta k}{\delta t} &= k\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} + 2\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) - h\frac{\partial\eta}{\partial x},\end{aligned}$$

résultat remarquable, en ce sens que les dérivées du second ordre de ξ et η n'y figurent pas.

On pourrait achever la détermination des invariants, en prolongeant la transformation infinitésimale (4) aux dérivées de h et k; puis, en ajoutant à chacune de ces dérivées des fonctions linéaires de $a_{0x}, b_{0y}, a_{0y}, b_{0x}, \alpha_1, \beta_1, \alpha$ et β, on peut faire disparaître, dans l'expression de leurs transformations infinitésimales, les dérivées du 3me ordre de ξ et η. Le calcul est rendu pratiquement facile, eu égard à notre remarque (3me partie, ch. I), sur l'intégration progressive des systèmes complets.

On obtient ainsi 6 invariants du 4me ordre, et, en général, $2(n-1)$ du $n^{ième}$ ordre, lesquels peuvent être exprimés en fonctions linéaires des $2(n-1)$ dérivées du $(n-2)^{ième}$ ordre de h et k.

Nous suivrons une autre marche. Il résulte des équations (4), qu'il y a une équation différentielle du 1er ordre, invariablement attachée à la proposée, car, si l'on combine avec (4) les formules:

$$\frac{\delta}{\delta t}dx = -\frac{\partial\xi}{\partial x}dx - \frac{\partial\xi}{\partial y}dy, \qquad \frac{\delta}{\delta t}dy = -\frac{\partial\eta}{\partial x}dx - \frac{\partial\eta}{\partial y}dy$$

on trouve l'équation *invariante:*

$$hdy - kdx = 0. \tag{5}$$

Il en résulte que l'on peut, par une transformation du groupe, annuler h; il suffit de prendre pour nouvelle variable indépendante, une fonction x_1 de x et y satisfaisant à:

$$h\frac{\partial x_1}{\partial x} + k\frac{\partial x_1}{\partial y} = 0 \tag{6}$$

en laissant y fixe: cela, sous la seule condition que x_1 ne se réduise pas à une simple fonction de y, c'est-à-dire, que l'on n'ait pas:

$$k = 0.$$

Dans ce cas, il suffit d'intervertir x et y, pour réaliser immédiatement la condition $h = 0$.

Ce calcul tomberait en défaut, dans le cas où on aurait simultanément:

$$h = 0, \qquad k = 0. \tag{7}$$

On a ainsi un *système invariant d'équations;* lorsqu'il est satisfait, nos

calculs précédents montrent que l'équation (1) n'admet pas d'invariants. Il en est ainsi, en particulier, pour l'équation

$$y'' = 0,$$

de sorte que le système (7) exprime les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (1) puisse se ramener par une transformation ponctuelle à l'équation précédente. On sait comment, dans ce cas, M. Lie a ramené l'intégration de cette équation (1), à celle d'une équation linéaire du 3me ordre.[1]

Quant à la transformation générale (2) qui laisse invariante l'équation $h = 0$, elle est définie, d'après (4), par:

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0.$$

Elle est bien indépendante des nouveaux coefficients de l'équation, et engendre un groupe, savoir:

$$x_1 = X(x), \qquad y_1 = Y(x, y) \tag{8}$$

ou, avec les transformations infinitésimales:

$$\delta x = -\xi(x)\delta t, \qquad \delta y = -\eta(x, y)\delta t \tag{8'}$$

où X et ξ sont des fonctions arbitraires de x seulement, Y et η des fonctions arbitraires de x et y.

L'équation (1) étant mise sous une nouvelle forme pour laquelle on a $h = 0$, tout revient maintenant à calculer les invariants de ses coefficients par rapport au groupe (8) ou (8'), lequel donne:

$$\begin{aligned} \frac{\delta a_0}{\delta t} &= a_0\left(2\frac{\partial \eta}{\partial y} - \xi'\right), & \frac{\delta b_0}{\delta t} &= b_0\left(2\xi' - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) - b_1\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \\ \frac{\delta a_1}{\delta t} &= -3a_0\frac{\partial \eta}{\partial x} + a_1\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}, & \frac{\delta b_1}{\delta t} &= b_1\xi' - 2a_1\frac{\partial \eta}{\partial x} + \xi'' - 2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \tag{9}$$

---

[1] Lie, Archives norvégiennes, 1883, *Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten,* III.

On rencontre une première *équation invariante,* d'ordre zéro:

$$a_0 = 0$$

et tout revient, dans le cas où elle est satisfaite, à étudier la transformation (9) par rapport aux trois fonctions a_1, b_1, b_0. Nous laisserons de côté ce cas particulier pour ne nous attacher qu'au cas général.

En prolongeant la transformation (9) au premier ordre, on fait apparaître les dérivées du 3me ordre de ξ et η, d'où il résulte que, dans un invariant du 1er ordre, les dérivées du premier ordre figurent seulement sous l'une des formes a_{0x}, a_{0y} et:

$$\beta = \frac{1}{3}(b_{1y} + 2a_{1x})$$

pour lesquelles on a:

$$\frac{\delta a_{0y}}{\delta t} = a_{0y}\left(3\frac{\partial\eta}{\partial y} - \xi'\right) + 2a_0\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2},$$

$$\frac{\delta a_{0x}}{\delta t} = 2a_{0x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + a_{0y}\frac{\partial\eta}{\partial x} + a_0\left(2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} - \xi''\right),$$

$$\frac{\delta\beta}{\delta t} = -2a_{0x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \beta\left(\xi' + \frac{\partial\eta}{\partial y}\right) - 2a_0\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}.$$

En combinant ceci avec (9), on est conduit à poser, pour faire disparaître les dérivées du second ordre de ξ et η:

$$a'_{0y} = a_{0y} - 2a_0a_1, \qquad a'_{0x} = a_{0x} + a_0b_1, \qquad \beta' = \beta + 2a_0b_0$$

et on a:

(10)
$$\frac{\delta a'_{0y}}{\delta t} = a'_{0y}\left(3\frac{\partial\eta}{\partial y} - \xi'\right) + 6a_0^2\frac{\partial\eta}{\partial x},$$

$$\frac{\delta a'_{0x}}{\delta t} = 2a'_{0x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + a'_{0y}\frac{\partial\eta}{\partial x},$$

$$\frac{\delta\beta'}{\delta t} = -2a'_{0x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \beta'\left(\xi' + \frac{\partial\eta}{\partial y}\right),$$

transformations auxquelles j'ajouterai, pour avoir les paramètres différentiels, les suivantes, où φ est supposé être un invariant:

$$\frac{\delta\varphi_x}{\delta t} = \varphi_x\xi' + \varphi_y\frac{\partial\eta}{\partial x}, \qquad \frac{\delta\varphi_y}{\delta t} = \varphi_y\frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

En rapprochant ceci de la première équation (9), on trouve un *invariant du premier ordre:*

$$B = \frac{a_0}{\left(a'_{0x} - \frac{a'^2_{0y}}{12a_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\beta' + \frac{a'_{0x}a'_{0y}}{3a_0^2} - \frac{a'^3_{0y}}{54a_0^4}\right)$$

et deux *paramètres différentiels:*

$$\Delta_x\varphi = \frac{a_0}{a'^2_{0x} - \frac{a'_{0y}}{12a_0^2}}\left(\varphi_x - \frac{a'_{0y}}{6a_0^2}\varphi_y\right), \qquad \Delta_y\varphi = \frac{\varphi_y}{\left(a'_{0x} - \frac{a'^2_{0y}}{12a_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour le second ordre, on rencontre, en prolongeant la transformation (9), les 6 dérivées du 4me ordre de ξ et η, lesquelles donnent 6 équations distinctes, de sorte que les 9 dérivées du second ordre de a_1, b_1, b_0 figurent dans tout invariant par 3 de leurs combinaisons. Nous prendrons pour ces combinaisons, $\Delta_x B$, $\Delta_y B$, qui sont des invariants et k, qui donne:

$$\frac{\delta k}{\delta t} = k\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} + 2\xi'\right). \tag{11}$$

Quant aux dérivées de a_0, il suffit d'en considérer deux seulement, en vertu de la relation $h = 0$. Nous poserons:

$$a'_{0y^2} = \frac{\partial}{\partial y}a'_{0y} = a_{0y^2} - 2a_0a_{1y} - 2a_1a_{0y},$$

$$a'_{0xy} = \frac{\partial}{\partial y}a'_{0x} = a_{0xy} + a_0b_{1y} + b_1a_{0y},$$

et on a:

$$\frac{\delta}{\delta t} a'_{0y^2} = a'_{0y^2}\left(4\frac{\partial \eta}{\partial y} - \xi'\right) + 3a'_{0y}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + 12a_0(a'_{0y} + 2a_0 a_1)\frac{\partial \eta}{\partial x} + 6a_0^2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\delta}{\delta t} a'_{0xy} = 3a'_{0xy}\frac{\partial \eta}{\partial y} + a'_{0y^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} + 2a'_{0x}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + a'_{0y}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}.$$

Ceci conduit à poser:

$$a''_{0y^2} = a'_{0y^2} - 3a_1 a'_{0y} + 3a_0^2 b_1,$$

$$a''_{0xy} = a'_{0xy} - 2a_1 a'_{0x} + \frac{1}{2} b_1 a'_{0y},$$

et on a:

$$\frac{\delta}{\delta t} a''_{0y^2} = a''_{0y^2}\left(4\frac{\partial \eta}{\partial y} - \xi'\right) + 21 a_0 a'_{0y}\frac{\partial \eta}{\partial x} + 3a_0^2 \xi'',$$

$$\frac{\delta}{\delta t} a''_{0xy} = 3a''_{0xy}\frac{\partial \eta}{\partial y} + a''_{0y^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} + 6a_0 a'_{0x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{2} a'_{0y}\xi''.$$

Les termes en ξ'' interviennent ici, de sorte qu'il faut introduire l'expression:

$$a''_{0xy} - \frac{a'_{0y} a''_{0y^2}}{6a_0^2}$$

qui donne:

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(a''_{0xy} - \frac{a'_{0y} a''_{0y^2}}{6a_0^2}\right) = 3\left(a''_{0xy} - \frac{a'_{0y} a''_{0y^2}}{6a_0^2}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} + \left(6a_0 a'_{0x} - \frac{7}{2}\frac{a'^2_{0y}}{a_0}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

et cette formule, combinée avec (9), (10) et (11) conduit à deux nouveaux *invariants du second ordre:*

$$C = \frac{a_0^2}{\left(a'_{0x} - \frac{a'^2_{0y}}{12a_0^2}\right)^{\frac{5}{2}}} k$$

et

$$D = \frac{1}{\left(a'_{0x} - \frac{a'^2_{0y}}{12a_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(a''_{0xy} - \frac{a'_{0y} a''_{0y^2}}{6a_0^2} - \frac{a'_{0x} a'_{0y}}{a_0} + \frac{a'^3_{0y}}{4a_0^3}\right),$$

de sorte qu'il y a 4 *invariants du second ordre:*

$$\Delta_x B\,,\ \Delta_y B\,,\ C\,,\ D.$$

On voit en outre que la transformation infinitésimale (9), prolongée au second ordre, conduit en considérant les dérivées des premier, second, troisième et 4me ordre de ξ et η à des équations qui sont *indépendantes*. Elles restent, a fortiori, indépendantes, lorsqu'on prolonge ensuite la transformation à l'ordre suivant; les 7 dérivées du 5me ordre de ξ et η donnent en outre, de par la manière dont elles figurent dans la transformation, des équations indépendantes entre elles et des précédentes; et comme il faut ajouter comme nouvelles variables les 12 dérivées du 3me ordre de $a_1\,, b_1\,, b_0$, et les 2 dérivées $a_{0y^3}\,, a_{0xy^2}$ de a_0, on obtient ainsi 7 invariants du 3me ordre. Plus généralement pour l'ordre n, on a encore pour déterminer les invariants, un système complet d'équations *indépendantes,* lequel comprend $n + 4$ équations de plus que le système d'ordre $n - 1$, et $3(n + 1) + 2 = 3n + 5$ variables de plus; ce qui donne donc, à partir de $n = 3\,, 2n + 1$ invariants distincts du $n^{ième}$ ordre.

Or, dans les 4 invariants du second ordre, $D\,, \Delta_y B\,, \Delta_x B\,, C$ figurent respectivement les expressions $a_{0y^2}\,, \beta_y\,, \beta_x$ et k, chacune d'elles entrant dans l'invariant correspondant, sans figurer dans ceux qui le précèdent. La même remarque pourra s'appliquer aux invariants du 3me ordre, qu'on en déduira à l'aide des paramètres différentiels, $\Delta_y D\,,\ \Delta_x D$, $\Delta_{y^2} B\,, \Delta_{xy} B\,, \Delta_{x^2} B\,, \Delta_y C\,, \Delta_x C$ relativement aux expressions: $a_{0y^3}\,, a_{0xy^2}$, $\beta_{y^2}\,, \beta_{xy}\,, \beta_{x^2}\,, k_y\,, k_x$; et ainsi de suite, de sorte que l'on obtient ainsi pour l'ordre n, en ne considérant que les dérivées a_{0y^n} et $a_{0xy^{n-1}}$ de a_0:

$$2 + n + n - 1 = 2n + 1$$

invariants distincts, c'est-à-dire tous les invariants cherchés.

2. Considérons, par exemple, une équation:

$$(12) \qquad y'' = a_0 y'^3 - a_1 y'^2 + b_1 y' - b_0,$$

dont les coëfficients seraient fonctions d'une seule variable, x ou y.

Dans ce cas, si l'invariant B n'est pas constant, tous les invariants du second ordre s'expriment en fonction de B:

$$(13)\quad \Delta_y B = f_1(B), \quad \Delta_x B = f_2(B), \quad C = f_3(B), \quad D = f_4(B),$$

et réciproquement, toute équation dont les invariants satisfont à ces relations (13) peut se ramener à la forme (12).

Si B était constant et égal à B_0, sans que C et D, C par exemple, le soient tous les deux, les équations homologues de (12) sont définies par les relations:

$$(14)\quad B = B_0, \quad D = \varphi_1(C), \quad \Delta_y C = \varphi_2(C), \quad \Delta_x C = \varphi_3(C).$$

Si enfin, B, C et D sont tous les trois constants, et égaux à B_0, C_0, D_0 les relations:

$$(15)\qquad B = B_0, \quad C = C_0, \quad D = D_0$$

suffisent pour définir les équations homologues de (12).

Réciproquement, je dis qu'une équation (1) dont les invariants satisfont à un système de relations ayant l'une des formes (13), (14), (15), c'est-à-dire, qui a un invariant distinct au plus, est homologue d'une équation de la forme (12) où les coefficients sont fonctions d'une seule variable.

Regardons, en effet, dans le système (13), ou (14), ou (15), a_0, a_1, b_1, b_0 comme fonctions d'une seule variable x, ou y; on obtient ainsi un système de 4 équations différentielles ordinaires au plus par rapport à 4 inconnues; et toute solution de ces équations donne des valeurs de a_0, a_1, b_1, b_0, fonctions d'une seule variable, qui répondent à la question.

Voici, comment, dans le cas général, on pourra ramener une pareille équation à la forme (12). Ayant annulé la quantité h, à l'aide d'une nouvelle variable x_1, prenons comme nouvelle fonction y_1, l'invariant B lui-même:

$$y_1 = B$$

ou encore C ou D, pourvu que l'invariant choisi ne se réduise pas à

une fonction de x_1 seulement. Cela revient à mettre l'équation (1) sous une forme réduite:

$$y_1'' = A_0 y_1'^3 - A_1 y_1'^2 + B_1 y_1' - B_0,$$

qui ne se conserve que par les transformations du groupe:

$$\partial x_1 = -\xi(x_1)\partial t.$$

Cette transformation donne:

$$\partial A_0 = -A_0 \xi' \partial t, \qquad \partial B_0 = 2 B_0 \xi' \partial t,$$
$$\partial A_1 = 0, \qquad \partial B_1 = (B_1 \xi' + \xi'')\partial t,$$

puis

$$\partial \frac{\partial A_0}{\partial x_1} = -A_0 \xi'' \partial t, \qquad \partial \frac{\partial A_0}{\partial y_1} = -\frac{\partial A_0}{\partial y_1} \xi' \partial t,$$
$$\partial \frac{\partial B_1}{\partial y_1} = \frac{\partial B_1}{\partial y_1} \xi' \partial t,$$

et admet donc pour invariants, les expressions:

$$A_1\ ,\ B_0 A_0^2\ ,\ \frac{1}{A_0}\frac{\partial A_0}{\partial y_1}\ ,\ \frac{\partial A_0}{\partial x_1} + A_0 B_1\ ,\ A_0 \frac{\partial B_1}{\partial y_1}.$$

Ces invariants, calculés avec les variables primitives, x et y, donnent des invariants de l'équation proposée et par suite sont tous des fonctions de B, c'est-à-dire de y_1. On aura donc, en désignant par des Y des fonctions de y_1 seulement, et par des X des fonctions de x_1 seulement:

$$A_1 = Y_1$$

puis:

$$A_0 = Y_0 X_0,$$

$$B_0 = \frac{Y_2}{Y_0^2 X_0^2},$$

$$B_1 = \frac{1}{Y_0 X_0}(Y_3 - Y_0 X_0').$$

Avec les variables x_1 et y_1, l'équation proposée est donc de la forme:

$$y_1'' = Y_0 X_0 y_1'^3 - Y_1 y'^2 + \frac{1}{Y_0 X_0}(Y_2 - Y_0 X_0') y' - \frac{Y_2}{Y_0^2 X_0^2}$$

ou, comme on sait:

$$x_1'' = \frac{Y_2}{Y_0^2 X_0^2} x_1'^3 - \frac{1}{Y_0 X_0}(Y_3 - Y_0 X_0') x_1'^2 + Y_1 x_1' - Y_0 X_0 .$$

En prenant comme nouvelle variable x, une fonction x_2 de x_1 seulement, on a:

$$x_2' = \frac{dx_2}{dx_1} x_1'$$

et

$$x_2'' = \frac{dx_2}{dx_1} x_1'' + \frac{d^2 x_2}{dx_1^2} x_1'^2$$

et cette équation devient:

$$x_2'' = \frac{Y_2}{Y_0^2 X_0^2}\frac{dx_2}{dx_1} x_1'^3 - \left[\frac{1}{Y_0 X_0}(Y_3 - Y_0 X_0')\frac{dx_2}{dx_1} - \frac{d^2 x_2}{dx_1^2}\right] x_1'^2$$

$$+ Y_1 \frac{dx_2}{dx_1} x_1' - Y_0 X_0 \frac{dx_2}{dx_1}.$$

Il suffit alors de prendre la fonction x_2 de x_1, telle que l'on ait:

$$\frac{dx_2}{dx_1} X_0 = 1$$

d'où

$$\frac{d^2 x_2}{dx_1^2} X_0 + \frac{dx_2}{dx_1} X_0' = 0,$$

pour que l'équation devienne:

$$x_2'' = \frac{Y_2}{Y_0^2} x_2'^3 - \frac{Y_3}{Y_0} x_2'^2 + Y_1 x_2' - Y_0$$

où les coefficients sont bien fonctions de y_1 seulement.

On voit que la réduction à cette forme se fait à l'aide de deux quadratures successives, la première pour déterminer x_1, en fonction de x et y, la seconde pour déterminer x_2 en fonction de x_1.

L'intégration de l'équation proposée s'achève par l'intégration d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre, de la forme:

$$\frac{du}{dx} = A_0 u^3 - A_1 u^2 + B_1 u - A_0$$

où les coefficients A sont fonctions de x, suivie ensuite d'une nouvelle quadrature.

SUR LA THÉORIE DES CAISSES DE PENSION

PAR

L. LINDELÖF

À HELSINGFORS.

Lorsqu'on veut se rendre compte de l'état d'une caisse de pension, il faut calculer d'un côté la valeur actuelle de ses revenues et de l'autre celle de ses dépenses, parmi lesquelles figurent surtout les engagements de la caisse soit envers les sociétaires eux-mêmes, soit envers leurs familles. Ce calcul doit, pour être complet, embrasser non seulement les sociétaires ou membres actuels, mais aussi les membres futurs. Tant qu'il s'agit des membres actuels, le calcul peut s'effectuer par les règles ordinaires de la théorie des rentes viagères, pourvu que les éléments statistiques nécessaires soient donnés. Le calcul relatif aux membres futurs est ordinairement sujet à plus de difficulté et d'incertitude. Cependant il y a un cas où ce calcul peut se faire presque avec la même certitude que pour les membres actuels; c'est celui où le nombre des membres actifs (c. à d. de ceux qui ne sont pas encore pensionnés) reste constant. Pour ce cas j'ai été conduit, en examinant l'état de quelques caisses particulières,[1] à employer un procédé, qui me semble très commode et en même temps aussi rigoureux que possible. Ne l'ayant pas rencontré ailleurs, j'ai cru qu'il pourrait mériter d'être porté à la connaissance de ceux qui s'occupent de telles enquêtes.

---

[1] Deux de ces enquêtes ont été publiées sous les titres: *Statistisk undersökning af ställningen i Finska Skolstatens Pensionskassa vid 1892 års ingång,* Helsingfors 1892, et *Nytt bidrag till belysande af ställningen i Folkskollärarenes i Finland enke- och pupillkassa,* Helsingfors 1893. La troisième, qui vient d'être terminée, est relative à la caisse de pension des marins finlandais.

Considérons, pour fixer les idées, une caisse qui doit fournir des pensions à un certain groupe d'employés, et admettons que le nombre des places ou des emplois qui s'y rapportent, ne varie pas avec le temps. Soit i l'âge d'un membre, lorsqu'il entre dans le groupe, et u celui auquel il en sort pour devenir pensionnaire. Chaque membre qui atteint l'âge u ou qui meurt avant de l'atteindre, sera immédiatement remplacé par un nouveau membre de l'âge i. Cela posé, nous fixons par la pensée un certain emploi, occupé actuellement par un membre de l'âge x, et nous nous proposons d'abord de calculer la valeur actuelle des pensions que la caisse aura à payer à ce membre et à tous ses successeurs dans le même emploi.

Désignons par C_x la valeur actuelle d'une somme 1 payable lorsque le membre (x) quitte sa place, soit comme pensionnaire, soit par la mort, par p_x la valeur actuelle de la pension qui lui est assurée à partir de l'âge u, et par P_x celle des pensions que la caisse aura à payer tant à cet employé qu'à tous ses successeurs futurs dans le même emploi; on aura évidemment

$$P_x = p_x + C_x . P, \tag{1}$$

P étant la valeur moyenne de P_x pour un nouveau membre au moment de son entrée en service. Quant à cette valeur, on pourrait se contenter de faire $P = P_i$ en supposant i constant, mais on arrive à une détermination plus rationnelle de P de la manière suivante. La formule générale (1), appliquée à un nouveau membre qui entre à l'âge i, donne

$$P_i = p_i + C_i P.$$

Si l'on connaît les âges d'entrée de tous les employés actuels ou d'un autre groupe quelconque suffisamment nombreux et qu'on prenne la moyenne des deux membres de l'équation précédente relativement à ce groupe, on trouve

$$P = p + C.P,$$

p étant la valeur moyenne de p_i et C celle de C_i. Il en résulte

$$P = \frac{p}{1 - C}, \tag{2}$$

et en substituant cette valeur dans l'équation (1),

$$P_x = p_x + \frac{C_x}{1 - C}p. \tag{3}$$

Dans cette expression de P_x le premier terme p_x se rapporte au fonctionnaire actuel (x); le second terme

$$\frac{C_x}{1 - C}p \tag{4}$$

représente la valeur des pensions qui seront payées à ses successeurs.

Considérons maintenant une place de sociétaire actuellement libre, mais qui sera immédiatement remplie. La valeur des pensions relatives à une telle place est, d'après la formule (3),

$$p + \frac{C}{1 - C}p = \frac{1}{1 - C}p. \tag{5}$$

En faisant la somme des expressions (4) et (5) relativement à tous les emplois existants, on trouve pour la valeur actuelle totale F des pensions des membres futurs la formule

$$F = \frac{\Sigma C_x + m}{1 - C}p, \tag{6}$$

où la somme Σ doit comprendre tous les fonctionnaires actuels et m signifie le nombre des charges vacantes.

Si l'on fait, dans l'expression précédente,

$$\frac{\Sigma C_x + m}{1 - C} = A, \tag{7}$$

cette quantité A a une signification remarquable. Elle représente évidemment la valeur actuelle d'une somme 1 qui serait servie chaque fois qu'un nouveau membre entre dans le groupe des sociétaires, ce qu'on pourrait exprimer plus simplement en disant que A représente *le nombre escompté des entrées.* Ce nombre joue un rôle important non seulement dans le calcul des pensions, mais aussi dans celui des contributions des membres perçues au profit de la caisse. L'expression (6) du capital des pensions des membres futurs se réduit par là simplement à

$$F = Ap.$$

La pension assurée à un sociétaire de l'âge x n'étant autre chose qu'une rente viagère différée à l'âge u, sa valeur p_x s'obtient par des règles connues. Ayant construit une table de ce valeurs, on calcule facilement à son aide la moyenne p de la fonction p_x pour un membre entrant en service. Quant à la fonction C_x, elle s'obtient par la formule

$$C_x = A_x + \frac{D_u}{D_x}(1 - A_u),$$

où l'on a désigné par

A_x la valeur actuelle d'une somme 1 assurée sur une tête de x ans, et par

$D_x = l_x v^x$ le nombre escompté des vivants (l_x) à l'âge x dans la table de mortalité des sociétaires, v étant la valeur actuelle d'une somme 1 payable au bout d'un an.

Nous avons admis dans ce qui précède, que toute place de sociétaire, devenue libre, sera immédiatement occupée par un nouveau membre. En réalité il n'en est pas ainsi; ordinairement il se passe un certain temps entre la sortie d'un membre et l'entrée de son successeur. En désignant par τ cet intervalle de temps, supposé constant, et par $[m]$ le nombre escompté des m vacances actuelles, chacune d'elles étant considérée au moment de sa cessation, l'expression de A deviendra

$$A = \frac{v^\tau \Sigma C_x + [m]}{1 - v^\tau C}$$

et l'on aura comme précédemment

$$F = Ap.$$

Jusqu'ici il n'a été question que d'une seule catégorie de pensionnaires. Supposons maintenant qu'il y ait deux classes de pensions différentes, que l'âge d'entrée dans la première classe soit a et dans la seconde b ($a > b$) et qu'on n'entre dans la première classe qu'en passant par la seconde. Soit A_1 le nombre escompté des entrées de nouveaux membres dans la classe I et A_2 celui des entrées dans la classe II. Pour mieux distinguer les deux classes, nous désignons l'âge d'un fonctionnaire actuel par x_1 ou x_2, suivant qu'il appartient à la première ou à la seconde classe, et pareillement par m_1 et m_2 les nombres des places actuellement

vacantes dans les deux classes. D'après l'équation (7), qui a une application immédiate à l'égard de la classe I, on trouve

$$A_1 = \frac{\Sigma x_1 + m_1}{1 - C_a}. \tag{8}$$

Quant à la classe II, il faut observer que toute entrée d'un nouveau membre dans la première classe produit une vacance dans la seconde et qu'elle est par conséquent accompagnée de l'entrée d'un nouveau membre aussi dans celle-ci. En calculant A_2 il faut donc considérer les membres des deux classes comme formant un seul groupe, auquel on applique la formule (7). On trouve ainsi

$$A_2 = \frac{\Sigma x_1 + \Sigma x_2 + m_1 + m_2}{1 - C_b}, \tag{9}$$

la somme Σx_1 étant relative à tous les membres actuels de la classe I et Σx_2 relative à tous ceux de la classe II. (Il est bien entendu que les pensionnaires ne sont pas ici compris parmi les membres de la caisse.)

Soit maintenant $p_x^{(1)}$ la valeur actuelle de la pension assurée à un membre de la classe I dont l'âge actuel est x, et $p_x^{(2)}$ celle de la pension assurée à un membre du même âge de la classe II. La valeur actuelle de toutes les pensions à payer aux membres futurs de la classe I sera évidemment

$$F_1 = A_1 p_a^{(1)}.$$

Pour la classe II cette valeur serait de même $A_2 p_b^{(2)}$, si tous les membres qui entrent dans cette classe devaient y rester toute leur vie. Mais comme un certain nombre de ceux-là avanceront plus tard (à l'âge a) à la classe I pour remplir les places devenues vacantes dans celle-ci, la-dite valeur sera par là diminuée d'une partie correspondante. Chaque fois qu'un tel avancement a lieu, un terme $p_a^{(2)}$ disparaitra de la somme des pensions de la classe II, et le nombre escompté de ces avancements étant A_1, la partie dont il s'agit sera evidemment $A_1 p_a^{(2)}$. La valeur escomptée des pensions qui seront réellement payées aux membres futurs de la classe II, se réduit par conséquent à

$$F_2 = A_2 p_b^{(2)} - A_1 p_a^{(2)}.$$

Ces valeurs de F_1 et F_2 subsistent encore si chaque vacance, au lieu d'être remplie immédiatement, comme nous l'avons supposé, doit durer un certain temps τ; seulement les expressions de A_1 et A_2 doivent en ce cas subir certaines modifications, faciles à trouver, mais auxquelles nous ne nous arrêterons pas ici.

Si les vacances survenues dans la classe I ne se remplissent pas toutes moyennant des avancements de la classe II, mais seulement pour une partie α, l'autre partie $1 - \alpha$ des vacances étant remplie par des personnes jusque-là étrangères à la caisse, l'expression (9) de A_2 doit être remplacée par celle-ci:

$$A_2 = \frac{\Sigma C_{x_2} + m_2 + \alpha(\Sigma C_{x_1} + m_1)}{1 - C_b}$$

et la valeur de F_2 deviendra

$$F_2 = A_2 p_b^{(2)} - \alpha A_1 p_a^{(2)},$$

tandis que les expressions de A_1 et de F_1 resteront inaltérées.

Considérons encore le cas où il y a trois classes de pension différentes, et supposons que la première classe soit recrutée uniquement parmi les membres de la seconde et celle-ci uniquement parmi les membres de la troisième. En distinguant par les indices 1, 2, 3 les valeurs de x, m, A et F relatives à ces différentes classes et désignant respectivement par a, b, c ($a > b > c$) l'âge d'entrée dans chacune d'elles, on trouvera, par un raisonnement analogue à celui qui précède,

$$A_1 = \frac{\Sigma C_{x_1} + m_1}{1 - C_a},$$

$$A_2 = \frac{\Sigma C_{x_1} + \Sigma C_{x_2} + m_1 + m_2}{1 - C_b},$$

$$A_3 = \frac{\Sigma C_{x_1} + \Sigma C_{x_2} + \Sigma C_{x_3} + m_1 + m_2 + m_3}{1 - C_c}.$$

Si l'on introduit encore les notations $p_x^{(1)}$, $p_x^{(2)}$, $p_x^{(3)}$ pour désigner la valeur actuelle de la pension assurée à un membre de x ans, suivant qu'il appartient à la classe I, II ou III, la somme des valeurs escomptées des

pensions que la caisse aura à payer aux membres futurs dans chacune de ces classes, sera respectivement

$$F_1 = A_1 p_a^{(1)},$$
$$F_2 = A_2 p_b^{(2)} - A_1 p_a^{(2)},$$
$$F_3 = A_3 p_c^{(3)} - A_2 p_b^{(3)}.$$

Les exemples qui précèdent, doivent suffire pour faire comprendre la nature et la portée de notre méthode. Nous n'avons parlé que des pensions dont jouissent les membres eux-mêmes à partir d'un certain âge. Mais il est évident que la méthode se prête tout aussi bien au calcul des pensions qui peuvent être assurées à leurs veuves et orphélins, ainsi qu'à celui des cotisations annuelles des membres, comme nous l'avons prouvé en détail dans les enquêtes déjà citées.

Il est à remarquer que notre méthode ne suppose pas la connaissance du nombre réel des pensionnaires à une époque quelconque de l'avenir et que nous avons ainsi pu éviter les calculs assez prolixes par lesquels on a essayé d'évaluer approximativement ce nombre.[1] Tout ce que nous présumons, c'est que le nombre des sociétaires actifs ou plutôt celui de leurs places reste constant.

C'est du reste le seul cas dans lequel le problème admette une solution tant soit peu exacte. Sans doute le nombre des emplois qui intéressent une caisse de pension, peut varier avec le temps, ces établissements ayant souvent une tendance à élargir leurs sphères d'activité, mais les variations de ce genre ont un caractère trop fortuit pour qu'on puisse en tenir compte autrement que par une estimation toujours très incertaine.

---

[1] Voir à ce sujet la communication intéressante de G. Eneström, portant le titre: *Härledning af en allmän formel för antalet pensionärer, som vid en godtycklig tidpunkt förefinnes inom en sluten pensionskassa,* insérée dans Öfversigt af K. Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm 1893.

SUR LES SÉRIES ENTIÈRES CONVERGENTES OU DIVERGENTES ET LES FRACTIONS CONTINUES RATIONNELLES

PAR

HENRI PADÉ[1]
À LYON.

(1). Les Géomètres du siècle dernier n'apportaient pas autant de soins que nous le faisons aujourd'hui à n'employer, dans le calcul, que des séries convergentes; certain grand traité de calcul différentiel et intégral du commencement de ce siècle le témoigne encore suffisamment. Ce sont surtout GAUSS et ABEL qui, suivant une expression que j'emprunte, »ont rappelé les Géomètres aux convenances de la rigueur et fait cesser ce scandale mathématique».

»Si, par exemple», écrit ABEL au début de son célèbre Mémoire sur la série du binôme, »on doit multiplier deux séries infinies l'une par l'autre, on pose

$$(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots)(v_0 + v_1 + v_2 + \ldots) = u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + (u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0) + \ldots.$$

Cette équation est très juste lorsque les séries $u_0 + u_1 + \ldots$, $v_0 + v_1 + \ldots$ sont finies. Mais si elles sont infinies, il est d'abord nécessaire qu'elles convergent, car une série divergente n'a pas de somme; ensuite la série du second membre doit de même converger.»

---

[1] Voyez Thèse de Doctorat: *Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles.* Gauthier-Villars, 1892.

Ce sont là des affirmations que je ne saurais contredire dans le cas où les termes des séries considérées sont des nombres donnés quelconques. Mais il est des séries qui peuvent être envisagées à un point de vue différent: ce sont celles où les termes sont des fonctions d'une variable dont la succession obéit à une loi particulière. Si, par exemple, on a affaire à des séries *entières,* comme, justement, la série à laquelle ABEL consacre son mémoire, il n'est pas impossible de montrer qu'une égalité telle que la précédente peut »être juste», ou, pour parler plus clairement, peut acquérir une signification très légitime, que les séries qui y figurent soient convergentes ou divergentes. C'est ce que je voudrais montrer ici.

L'idée fondamentale est donc qu'une série entière met en évidence autre chose qu'une suite de quantités ayant chacune une valeur numérique déterminée pour une valeur donnée de la variable. Elle fait connaître encore et surtout, car c'est bien là le caractère qui la différentie de toute autre série, une suite de polynômes dont chacun se déduit du précédent en ajoutant un terme de degré supérieur à ceux des autres termes.

Il peut arriver que la considération d'une telle suite de polynômes suffise, à elle seule, pour conduire à la définition d'une fonction, et cela, indépendamment des valeurs numériques qu'ils acquièrent quand on donne à la variable une valeur déterminée, en d'autres termes, indépendamment de la convergence ou de la divergence de la série entière dont ils sont extraits; la fonction étant tellement définie, toutefois, que, si la série est convergente, la fonction soit la somme de la série.

C'est la manière d'arriver à cette définition de la fonction qui fait l'objet de la première section de ce travail. Elle repose sur les résultats établis dans le mémoire cité en Note à la page précédente, et sur deux faits très remarquables de convergence signalés par LAGUERRE et HALPHEN. Cependant, pour permettre la lecture sans que l'étude préalable du premier mémoire ait été faite, je commence par un aperçu synthétique très sommaire des résultats qui sont le plus nécessaires, ce qui, au surplus, rend l'enchaînement des idées plus clair.

Une fois la définition de la fonction acquise, les règles élémentaires d'addition et de multiplication des séries peuvent être étendues immédiatement à des séries entières divergentes; je fais cette extension dans une seconde section.

Enfin, dans la troisième et dernière section, je discute brièvement certains des résultats sur lesquels repose la méthode, et, plus particulièrement, la notion fondamentale de fraction continue simple.

Ce travail a été résumé dans une courte Note présentée à l'Académie des Sciences de Paris, le 27 mars 1893.

I.

(2). Désignons par y la série entière convergente ou divergente

$$s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \dots,$$

dans laquelle nous supposons s_0 différent de zéro.

Soient p, q deux nombres, égaux ou inégaux, pris dans la suite $0, 1, 2, 3, \dots$. A ces deux nombres correspond une fraction rationnelle $\frac{U}{V}$, dans laquelle U est de degré au plus égal à p, V de degré au plus égal à q, et qui jouit de la propriété suivante: son développement suivant les puissances croissantes de x coïncide avec la série y jusqu'à un terme de rang plus élevé que cela n'aurait lieu avec toute autre fraction rationnelle dont les degrés des termes ne dépasseraient pas non plus respectivement p et q. Cette fraction speciale $\frac{U}{V}$, nous la nommerons la *fraction rationnelle approchée* de y correspondant au couple (p, q).

Les fractions rationnelles approchées de y forment une suite illimitée à double entrée; nous pouvons les imaginer écrites dans les cases d'un tableau à double entrée (T), les files verticales correspondant aux valeurs $0, 1, 2, \dots$ de p, et les files horizontales à ces mêmes valeurs de q.

Si la fraction approchée qui correspond au couple (p, q) ne figure qu'une seule fois dans le tableau (T), les degrés de ses termes sont précisément égaux à p et q, et son développement suivant les puissances de x coïncide avec la série y jusqu'au terme, exclusivement, de degré $p + q + 1$, terme qui figure nécessairement dans la série. Nous dirons alors que la fraction approchée est une *fraction normale*.

Dans ce qui suit, pour simplifier, nous considérons seulement le cas où le tableau (T) ne renferme que des fractions normales.

Nous dirons de deux fractions approchées $\frac{U}{V}$, $\frac{U'}{V'}$, qui correspondent aux couples (p, q), (p', q'), qu'elles sont *également avancées* dans le tableau, si $p + q$ est égal à $p' + q'$; la fraction $\frac{U'}{V'}$ sera dite plus avancée que la fraction $\frac{U}{V}$, si $p' + q'$ est supérieur à $p + q$. Enfin, deux fractions approchées seront dites *contiguës,* si les cases où elles figurent ont un côté ou un sommet commun.

Extrayons du tableau (T) une suite linéaire de fractions satisfaisant aux conditions suivantes:

1°. La première fraction sera une fraction du bord du tableau;

2°. Deux fractions consécutives quelconques seront contiguës;

3°. Chaque fraction sera plus avancée dans le tableau que celle qui la précède.

Les fractions d'une telle suite sont les réduites successives d'une fraction continue, dont les numérateurs partiels sont tous des monômes entiers en x dont le degré et le coefficient sont différents de zéro, et les dénominateurs partiels des polynômes dont le terme constant est différent de zéro; à la condition, toutefois, d'adopter, si la première fraction de la suite appartient au bord supérieur du tableau, une fraction continue de la forme

$$\text{(I)} \qquad a_1 + \cfrac{\alpha_2}{a_2 + \cfrac{\alpha_3}{a_3 + \cdots}},$$

où a_1 est un polynôme, et, si la première fraction de la suite appartient au bord latéral du tableau, une fraction continue de la forme

$$\text{(II)} \qquad \cfrac{\alpha_1}{a_1 + \cfrac{\alpha_2}{a_2 + \cdots}},$$

α_1 étant une constante. Une fraction continue de cette nature, qu'elle appartienne à l'une ou à l'autre forme, est dite une *fraction continue simple.*

Réciproquement, si les réduites d'une fraction continue simple appartiennent toutes au tableau (T), elles forment une suite de fractions qui satisfait aux trois conditions énoncées précédemment.

(3). Les fractions de la première file horizontale du tableau satisfont à ces conditions; elles ne sont autres que les polynômes obtenus en limitant la série y à ses termes successifs. La fraction continue simple correspondante, qui est de la forme (II), s'obtient immédiatement au moyen des équations

$$\begin{aligned} \alpha_{n+3} S + a_{n+3}(S + s_{n+1}x^{n+1}) &= S + s_{n+1}x^{n+1} + s_{n+2}x^{n+2}, \\ \alpha_{n+3} \quad + a_{n+3} \qquad\qquad &= 1, \end{aligned}$$

où S représente le polynôme, de degré n, qui correspond au couple $(n, 0)$. Ces équations n'expriment pas autre chose que la loi de formation des réduites; elles donnent

$$a_{n+3} = 1 + \frac{s_{n+2}}{s_{n+1}}x, \qquad \alpha_{n+3} = -\frac{s_{n+2}}{s_{n+1}}x,$$

et l'on obtient ainsi la fraction continue

$$\cfrac{s_0}{1} - \cfrac{\frac{s_1}{s_0}x}{1 + \frac{s_1}{s_0}x - \cfrac{\frac{s_2}{s_1}x}{1 + \frac{s_2}{s_1}x - \cfrac{\frac{s_3}{s_2}x}{1 + \frac{s_3}{s_2}x - \dots,}}}$$

déjà donnée par Euler dans son *Introductio*.

(4). De cette fraction continue peut se déduire immédiatement la série y correspondante, et ces deux expressions analytiques semblent s'équivaloir entièrement. Cependant, au point de vue de la formation du tableau (T), une distinction doit être faite entre elles: il faut ne voir, dans la série y, que la fraction de rang infiniment grand de la première file horizontale du tableau, tandis que la fraction continue doit être regardée comme faisant connaître, par ses réduites successives, la suite complète des fractions de cette première file. Et, en effet, c'est la généralisation de cette deuxième manière de concevoir la définition du tableau (T) qui nous amène à cette proposition fondamentale: *Le tableau* (T) *est défini par l'une quelconque de ses fractions continues simples.*

La démonstration repose sur cette remarque que, si l'on connait la fraction $\frac{U}{V}$ qui correspond au couple (p, q), toutes celles qui sont au plus aussi avancées se trouvent par là-même déterminées.

Soit, en effet, $\frac{U'}{V'}$ une fraction, correspondant au couple (p', q'), au plus aussi avancée que $\frac{U}{V}$, en sorte que la somme $p' + q'$ soit au plus égale à $p + q$. Les développements, suivant les puissances croissantes de x, de $\frac{U}{V}$ et de $\frac{U'}{V'}$ coïncident avec la série y respectivement jusqu'aux termes, exclusivement, de degrés $p + q + 1$ et $p' + q' + 1$; comme $p' + q' + 1$ est au plus égal à $p + q + 1$, on en conclut que les développements de $\frac{U}{V}$ et de $\frac{U'}{V'}$ coïncident entre eux jusqu'aux termes inclusivement, de degré $p' + q'$; donc, si l'on forme le tableau des fractions rationnelles approchées de la fonction $\frac{U}{V}$, la fraction $\frac{U'}{V'}$ sera la fraction de ce tableau qui correspond au couple (p', q'). Ainsi, dès que $\frac{U}{V}$ est connue, $\frac{U'}{V'}$ l'est également.

On voit alors qu'il suffit qu'une suite illimitée de fractions de plus en plus avancées du tableau (T) soit donnée, pour que le tableau tout entier se trouve défini. Or, les réduites d'une fraction continue simple du tableau constituent une suite de cette nature, et la proposition que nous voulions démontrer se trouve établie.

(5). Dans leurs travaux sur le développement en fractions continues des fonctions, LAGUERRE et HALPHEN[1] ont mis en lumière deux faits extrêmement remarquables auxquels nous allons avoir recours maintenant.

LAGUERRE a établi qu'à une série entière divergente pouvait correspondre une fraction continue simple convergente; puis HALPHEN a montré,

---

[1] LAGUERRE: Bulletin de la Société mathématique de France, t. 7, 1879; Journal de mathématiques pures et appliquées, 4e série, t. 1, 1885.

HALPHEN: Comptes rendus de l'Académie des sciences, t. 100, 1885; *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, t. 2, 1888.

qu'inversement, une fraction continue simple pouvait être divergente, alors que la série correspondante était convergente.

Nous sommes maintenant en état de concevoir ces deux résultats particuliers dans ce qu'ils ont de général, et nous dirons simplement: *parmi les fractions continues simples, en nombre illimité, qui peuvent être déduites d'un tableau de fractions rationnelles approchées, les unes peuvent être convergentes, les autres divergentes.*

Supposons alors que l'on ait une fraction continue simple dont toutes les réduites appartiennent à un même tableau de fractions rationnelles approchées; ce tableau se trouve par là entièrement défini; il lui correspond une infinité de fractions continues simples; si, parmi elles, il en est une qui soit convergente, elle définit une fonction, et le tableau est celui des fractions rationnelles approchées de cette fonction. Ainsi, partant d'une fraction continue simple convenable, sans rien supposer, toutefois, sur sa convergence ou sa divergence, nous parvenons à la définition d'une fonction; cette fonction est évidemment la valeur, au sens habituel de ce mot, de la fraction continue simple, au cas où celle-ci est convergente.

Dans l'hypothèse très particulière où la fraction continue simple qui sert de point de départ est celle d'EULER, ou, ce qui revient au même, si c'est une série entière qui sert à définir le tableau, nous avons cette proposition: *une série entière peut suffire, qu'elle soit convergente ou divergente, à définir une fonction; et cette définition est alors telle que, lorsque la série est convergente, la fonction n'est autre que la somme de la série.*

II.

(6). Soient (T_1) et (T_2) deux tableaux de fractions rationnelles approchées, que nous supposerons, comme précédemment, uniquement composés de fractions normales.

De ces deux tableaux, nous en déduisons un troisième (T) de la façon suivante: désignons par $\frac{U_1}{V_1}$, $\frac{U_2}{V_2}$ les fractions qui, dans (T_1), (T_2),

correspondent au couple (p, q). Faisons la somme $\frac{U_1}{V_1} + \frac{U_2}{V_2}$, et formons la fraction rationnelle approchée $\frac{U}{V}$ qui, pour cette fonction, correspond au couple (p, q). La fraction $\frac{U}{V}$ sera celle que nous ferons figurer, dans le tableau (T), dans la case (p, q).

Je dis maintenant que, si les tableaux (T_1) et (T_2) définissent chacun une fonction, respectivement les fonctions y_1 et y_2, le tableau (T) est un tableau de fractions rationnelles approchées, il définit une fonction y, et cette fonction est la somme $y_1 + y_2$ des deux premières.

Dans ces hypothèses, on a, en effet,

$$y_1 = \frac{U_1}{V_1} + h_1 x^{p+q+1} + h'_1 x^{p+q+2} + \dots,$$

$$y_2 = \frac{U_2}{V_2} + h_2 x^{p+q+1} + h'_2 x^{p+q+2} + \dots;$$

d'autre part, en raison de la façon même dont est définie la fraction $\frac{U}{V}$:

$$\frac{U_1}{V_1} + \frac{U_2}{V_2} = \frac{U}{V} + k x^{p+q+1} + k' x^{p+q+2} + \dots;$$

et on conclut de ces égalités celle-ci:

$$y_1 + y_2 = \frac{U}{V} + h x^{p+q+1} + h' x^{p+q+2} + \dots.$$

Si donc on forme le tableau qui correspond à la fonction $y_1 + y_2$, la fraction $\frac{U}{V}$ sera, dans ce tableau, celle qui figure dans la case (p, q); en d'autres termes, le tableau obtenu n'est autre que (T), ce qui démontre la proposition.

(7). Si $\frac{U_1}{V_1}$ et $\frac{U_2}{V_2}$ sont des polynômes, la fraction $\frac{U}{V}$ est simplement leur somme.

Supposons maintenant que les deux tableaux (T_1) et (T_2) aient été déduits de deux séries entières, convergentes ou divergentes; alors les polynômes qui composent la première file horizontale du tableau (T)

sont ceux que l'on déduit de la série, convergente ou divergente, obtenue en ajoutant terme à terme les deux séries données, et l'on arrive ainsi à ce résultat: *Si deux séries entières, convergentes ou divergentes, définissent chacune une fonction, la série, convergente ou divergente, obtenue en les ajoutant terme à terme, définit elle-même une fonction qui est la somme des deux premières.*

(8). Tout ce que nous venons de dire pour l'addition peut évidemment être répété pour la multiplication; la fraction $\frac{U}{V}$ du tableau (T), qui correspond au couple (p, q), est alors la fraction rationnelle approchée de la fonction $\frac{U_1}{V_1} \times \frac{U_2}{V_2}$ pour le couple (p, q). On arrive à cette conclusion: *Si deux séries entières, convergentes ou divergentes*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots, \qquad v_0 + v_1 + v_2 + \ldots$$

définissent chacune une fonction, la série entière, convergente ou divergente,

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \ldots$$

définit elle-même une fonction qui est le produit des deux premières.[1]

III.

(9). On voit le rôle fondamental que prennent, dans les considérations qui précèdent, les résultats obtenus par LAGUERRE et HALPHEN; ils constituent, avec la notion de la multiplicité des fractions continues simples pour une même fonction, le fond même de la méthode.

Déjà, au siècle dernier, LAMBERT avait constaté, par le calcul direct d'un certain nombre de réduites, qu'une fraction continue pouvait être convergente tandis que la série d'où on l'avait déduite était divergente;

---

[1] Ces résultats ont été communiqués à M. J. TANNERY dans une lettre datée de Gœttingue, le 1[er] avril 1891.

mais c'est là une constatation qui, après des exemples comme ceux que nous offre la série de STIRLING, est totalement dénuée de valeur démonstrative, et LAGUERRE est le premier qui ait mis le fait en question tout à fait hors de doute.

J'ai donné la définition précise de la fraction continue simple et établi les modes de génération de celles qui correspondent à une fonction dans le mémoire auquel se rapporte ce travail.

Auparavant, les Géomètres qui s'occupaient de la question du développement d'une fonction en fractions continues se trouvaient en présence tantôt de l'une, tantôt de l'autre de celles qui correspondent à la fonction qu'ils étudiaient; en sorte que, sous cette expression »le développement d'une fonction en fraction continue», on a entendu les choses les plus diverses.

Le plus généralement, ils supposaient la série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x. En suivant alors, pas à pas, la méthode qui est employée pour obtenir le développement en fraction continue arithmétique d'un nombre irrationnel, on obtient une fraction continue où tous les numérateurs partiels sont égaux à l'unité et tous les dénominateurs partiels des polynômes entiers en x. La nature de l'approximation donnée par les réduites successives a alors un caractère très précis qui les caractérise complètement.

C'est la convergence d'une fraction continue de cette nature que LAGUERRE a mise en évidence, alors que la série, ordonnée suivant les puissances décroissantes de x, d'où il l'a déduite, est divergente et satisfait, au point de vue *formel,* à une équation différentielle linéaire du premier ordre; la fonction vers laquelle converge la fraction continue est une intégrale de cette équation.

Si, dans une telle fraction continue, on remplace x par $\frac{1}{x}$ et que l'on rende, par des multiplications convenables, tous les éléments, numérateurs et dénominateurs partiels, entiers, on obtient une fraction continue simple. Dans le cas le plus général, cette fraction est *régulière:* tous les numérateurs partiels sont du second degré, et tous les dénominateurs partiels du premier; dans tous les cas, c'est une fraction très particulière parmi celles qui correspondent à la fonction.

Ce sont des développements de cette dernière forme régulière que

Jacobi avait adoptés pour la fonction $\sqrt{P(x)}$, $P(x)$ représentant un polynôme du quatrième degré, alors qu'il en a fait connaître, sans démonstration, les expressions générales des réduites en termes elliptiques. Mais, tandis qu'il y a une infinité de tels développements pour la fonction, ayant cette forme régulière ou d'autres encore, il n'en a considéré que deux. Halphen, entrant dans la voie qui lui était ainsi ouverte, a repris également ces deux seuls développements pour démontrer, d'abord les propositions de Jabobi, et en déduire, ensuite, avec une sagacité merveilleuse, les admirables résultats que l'on sait et qui ont été si justement appréciés par M. Poincaré dans la notice qu'il a consacrée, dans le journal de l'Ecole Polytechnique, a l'illustre Géomètre. Mais n'est-il pas permis de croire que cette particularisation excessive des développements considérés a pu cacher ce que les résultats obtenus peuvent avoir de général, et, par conséquent, la loi, sans doute plus simple, dont ils ne sont que des cas spéciaux.

C'est une autre forme de fraction continue simple que celle que Gauss a fait connaître pour le quotient de deux séries hypergéométriques; elle est également régulière, les numérateurs partiels y sont du premier degré, et les dénominateurs partiels sont des constantes. Là encore, il y a, pour la fonction, un nombre illimité de développements de cette forme, tandis que, jusqu'ici, celui de Gauss seul a été considéré. On sait la belle tentative faite par Riemann pour établir la convergence de cette fraction continue. En lisant sa démonstration, on peut remarquer qu'il obtient, pour expression générale par des séries hypergéométriques de la réduite de rang m, deux formes différentes suivant que m est pair ou impair; c'est qu'au fond la fraction continue considérée n'est que la superposition, pour ainsi dire, de deux fractions continues simples, l'une d'elles ayant pour réduites les réduites de rang pair, et l'autre les réduites de rang impair, fractions qui pourraient être obtenues immédiatement par la simple application d'une identité de Lagrange; mais alors il semble bien que la méthode de démonstration de Riemann, si tant est qu'elle soit tout à fait rigoureuse, s'appliquerait à la démonstration de la convergence des autres fractions continues régulières relatives à la fonction considérée.

Le développement d'Euler, enfin, est un troisième type de développement encore considéré autrefois. Il est également régulier; les numérateurs

et les dénominateurs partiels sont du premier degré. Comme dans les cas précédents, il y a, pour une fonction, une infinité de développements de cette forme, et le seul qui ait été considéré jusqu'ici est celui-là même donné par EULER, qui a pour réduites les polynômes successifs de la série.

Ces quelques exemples ne suffisent-ils pas déjà à justifier cette assertion qu'un sens assez vague était attaché à cette expression de développement d'une fonction en fraction continue, qu'on entendait par là des modes de développements fort différents les uns des autres, sans liens apparents entre eux, qu'on n'apercevait pas la multiplicité, pour une même fonction, des fractions continues de chacun de ces modes.

Les ouvrages classiques traitant de la question accusent, en général, au plus haut point, ces défauts. Je ne parle pas de l'étrange confusion qui y apparait entre la théorie du développement d'un nombre irrationel en fraction continue arithmétique et celui d'une fonction en fraction continue algébrique; le rapprochement que l'on fait toujours entre ces deux ordres de faits est tout aussi bizarre que le serait l'idée que la théorie des séries entières doit toujours et nécessairement être précédée de la théorie des fractions décimales. Mais on peut constater que les auteurs négligent de faire savoir ce qu'ils entendent par le développement d'une fonction en fraction continue, ou que, s'ils font connaître une définition, ils choisissent un mode particulier de développement dans lequel ne rentrent pas ensuite tous leurs exemples, ou même dont il n'a jamais été donné aucun exemple.

Mais il y a plus. Au moins tous les développements que nous avons cités jusqu'ici, si divers et si épars soient-ils, avaient ce caractère commun que leurs réduites avaient avec la fonction développée certaines relations précises d'approximation; mais on a été jusqu'à donner, sous le nom de développement en fraction continue d'une fonction, des expressions qui n'ont plus avec celle-ci aucun rapport, au point de vue de l'approximation donnée par les réduites.

Je puis, par exemple, égaler une fonction à une fraction continue limitée dans laquelle je me donne arbitrairement tous les numérateurs partiels et tous les dénominateurs partiels sauf le dernier, et regarder cette égalité comme une équation d'où je déduis ce dernier dénominateur. Si, maintenant, je développe celui-ci, n'importe comment, en fraction con-

tinue et que je le remplace, dans l'égalité, par ce développement, j'obtiens une fraction continue à la formation de laquelle a bien contribué la fonction; mais il est bien clair que les réduites de cette fraction, au moins les premières, n'ont plus absolument aucune relation d'aucune espèce avec la fonction développée; doit-on dire que l'on a là un développement en fraction continue de la fonction?

De même, il ne suffit pas qu'une fonction satisfasse à une équation fonctionnelle linéaire à trois termes, analogue aux relations entre séries hypergéométriques contiguës, pour que le développement que l'on en déduit, par le procédé connu, pour le quotient de deux de ces fonctions, ait quelque relation d'approximation avec ce quotient. Il semble qu'on l'ait pu croire, cependant, et qu'on se soit demandé quelles relations les réduites d'un développement obtenu ainsi pouvaient avoir avec celles des développements d'EULER et de GAUSS, sans qu'on ait pu faire la réponse, bien entendu.

(10). Ce sont toutes ces constatations qui, alors que, guidé par de fausses analogies entre la théorie des fractions continues arithmétiques et celle des fractions continues algébriques, je poursuivais un but bien différent, m'ont conduit à rechercher des fondements précis d'une théorie des fractions continues algébriques. Prenant pour point de départ le caractère des réduites d'être des fractions rationnelles approchées de la fonction, j'ai été amené à la définition de la fraction continue simple, à la notion de leur multiplicité pour une même fonction, à l'étude des types réguliers, rattachant ainsi à une conception générale et parfaitement précise tous les exemples divers donnés antérieurement.

La fraction continue simple est à celles où les éléments sont simplement rationnels, ce que la série entière est à celles où les termes sont aussi simplement rationnels; c'est là une analogie importante pour justifier l'introduction de la notion de fraction continue simple, et qui eut peut-être empêché certains doutes de se manifester[1] si je l'avais plus clairement mise en évidence.

---

[1] Revue générale des sciences, 3[e] année, p. 381. M. L. AUTONNE m'accorde un résultat que je n'ai pas obtenu. Si j'ai tenté de traiter, par ma méthode, la série hypergéométrique, ce dont je ne dis pas un mot dans mon mémoire, mes efforts ont

Le caractère fondamental d'une série entière consiste en ce que chaque nouveau terme ajouté est un monôme entier de degré supérieur à tous les précédents, en sorte que l'on obtient des polynômes qui représentent avec une approximation de plus en plus grande l'un quelconque de ceux qui viennent après.

Or, dans une fraction continue simple, ce caractère fondamental se retrouve: chaque réduite représente avec une approximation qui croît en même temps que le rang l'une quelconque des réduites suivantes; et il disparaît si l'on modifie de quelque façon la définition, comme le peuvent montrer les exemples les plus simples. Si donc on veut trouver, dans les fractions continues, l'analogue de la série entière, c'est tout au moins parmi les fractions continues simples qu'il faut le chercher. Le seul reproche que l'on pourrait encore adresser à la définition de la fraction continue simple, c'est de n'être pas encore assez restrictive; et, en effet, cette définition laisse échapper ce caractère important, sur lequel j'ai insisté précédemment et qui appartient aux séries entières, que ses réduites soient nécessairement des fractions rationnelles approchées pour une réduite de rang plus élevé quelconque; si on se donne, à priori, une fraction continue simple, ses réduites ne sont par conséquent pas nécessairement des fractions d'un tableau de fractions rationnelles approchées; elle ne définit pas en général un tel tableau, tandis qu'une série entière le définit toujours.

(11). Comme une série entière peut être mise sous forme de fraction continue simple, le théorème d'Abel sur la convergence des séries entières peut être transporté à cette fraction continue, et l'on est alors conduit à rechercher ce que devient ce théorème quand, au lieu de considérer la fraction continue d'Euler, on s'adresse à une fraction continue simple quelconque. Comme je l'ai montré, on retrouve la notion de cercle de convergence, mais modifiée d'une façon essentielle, en ce qu'il peut y avoir, à l'intérieur du cercle de convergence, des ensembles spéciaux de points, isolés ou formant des lignes ou des champs, pour lesquels la fraction diverge, tandis qu'inversement de tels ensembles peuvent se présenter à l'extérieur du cercle de convergence pour lesquels la fraction converge.

échoué; je n'ai traité, en empruntant l'expression générale de la fraction rationnelle approchée à M. Hermite, que la fonction exponentielle.

Ces considérations montrent combien il serait intéressant de reprendre, au point de vue général auquel nous pouvons nous placer maintenant avec la notion de la multiplicité des fractions continues pour une même fonction, les beaux travaux d'HALPHEN, qui semble bien avoir rencontré les premiers exemples de ces ensembles spéciaux de points où il y aurait convergence ou divergence anomales.

Lyon, le 26 février 1893.

ANGENÄHERTE DARSTELLUNG DER KVADRATWURZEL EINER VERÄNDERLICHEN

MITTELST EINFACHER BRÜCHE

VON

P. TCHEBYCHEW.

Aus dem Russischen[1] übersetzt von O. Backlund.

§ 1. Bei der Berechnung von Kvadraturen muss man häufig, wegen Integrationsschwierigkeiten, die (zu integrirenden) Functionen durch angenäherte Ausdrücke ersetzen. Wenn die Integrationsschwierigkeiten von einem Radicale zweiten Grades herrühren, so kann man mit grossem Vortheil als angenäherten Ausdruck des Radicales

$$\sqrt{\frac{1}{x}}$$

die Function

$$A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n + x},$$

anwenden, welche man mittelst des ersten Theoremes erhält, das ich in meinem Mémoire: *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions,*[2] bewiesen habe. Stellt man sich die Aufgabe, die Grenzen der relativen Fehler für alle Werthe von x zwischen $x = 1$ und $x = h > 1$ möglichst eng zu machen, so wird die beste Darstellung des Radicales

$$\sqrt{\frac{1}{x}}$$

durch die Function

$$A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n + x}$$

---

[1] Записки Импер. Академіи Наукъ. Bd. 61, St. Petersburg 1889.

[2] Mémoires de l'Académie Impériale. Tome VII, 1858.

diejenige sein, für welche die Verhältnisse

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \dots + \frac{B_n}{C_n + x}},$$

$$\frac{A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \dots + \frac{B_n}{C_n + x}}{\sqrt{\frac{1}{x}}}$$

zwischen $x = 1$ und $x = h$ möglichst wenig sich von 1 entfernen. Eine solche Darstellung des Radicales

$$\sqrt{\frac{1}{x}}$$

können wir mit Hülfe des erwähnten Theoremes finden, indem wir es zur Bestimmung der Grössen

$$A, B_1, B_2, \dots, B_n, \qquad C_1, C_2, \dots, C_n$$

anwenden, so dass der Logarithmus der Verhältnisse

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \dots + \frac{B_n}{C_n + x}}$$

oder

$$\frac{A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \dots + \frac{B_n}{C_n + x}}{\sqrt{\frac{1}{x}}}$$

möglichst wenig von 0 abweicht, wenn x von $x = 1$ bis $x = h$ sich ändert. Wenn wir annehmen, dass in dem Intervalle $x = 1$, $x = h$ die Grenzwerthe des letzten Verhältnisses

$$l, \frac{1}{l} > l$$

sind, so können wir uns mit Hülfe des erwähnten Theoremes von der Möglichkeit überzeugen, diese Grenzen der Einheit zu nähern, indem die $2n+1$ Constanten der Function

$$y = \frac{A + \frac{B_1}{C_1+x} + \frac{B_2}{C_2+x} + \cdots + \frac{B_n}{C_n+x}}{\sqrt{\frac{1}{x}}}$$

$$= \sqrt{x}\left[A + \frac{B_1}{C_1+x} + \frac{B_2}{C_2+x} + \cdots + \frac{B_n}{C_n+x}\right]$$

in passender Weise bestimmt werden, vorausgesetzt, dass y von $x = 1$ bis $x = h$ weniger als $2n+2$ Mal die Grenzwerthe

$$l, \frac{1}{l}$$

erreicht.

Hieraus folgt, dass die grösste Annäherung der Grenzwerthe

$$l, \frac{1}{l}$$

an die Einheit nur bei solchen Werthen von

$$A, B_1, B_2, \ldots, B_n. \quad C_1, C_2, \ldots, C_n,$$

stattfindet, für welche die Function

$$(1) \qquad y = \sqrt{x}\left[A + \frac{B_1}{C_1+x} + \frac{B_2}{C_2+x} + \cdots + \frac{B_n}{C_n+x}\right]$$

im Intervalle $x = 1$, $x = h$ wenigstens $2n+2$ Mal die Grössen

$$l, \frac{1}{l}$$

erreicht ohne sie zu überschreiten.

Wir werden jetzt zeigen, wie auf Grundlage des angeführten sowohl die Grösse l wie die Function y, welche zur Lösung unserer Aufgabe führen, gefunden werden können.

§ 2. Da die Function y zwischen $x = 1$, $x = h$ über die Werthe l und $\frac{1}{l}$ hinausgeht, wenn sie in diesem Intervalle für irgend einen von 1 und h verschiedenen Werth von x gleich l oder $\frac{1}{l}$ wird, ohne dass $\frac{dy}{dx} = 0$, so müssen nach dem oben auseinandergesetzten mindestens $2n + 2$ verschiedene Werthe von x, von $x = 1$ an bis $x = h$, gleichzeitig den Gleichungen

$$(l^2 - y^2)(1 - l^2 y^2) = 0$$

und

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 x(1 - x)(h - x) = 0$$

genügen, wo nach (1) die linken Seiten rationelle Brüche darstellen, deren gemeinschaftlicher Nenner

$$(C_1 + x)^4 (C_2 + x)^4 \ldots (C_n + x)^4$$

ist und deren Zähler $(4n + 2)^{\text{ten}}$ Grades sind. Aus der Zusammensetzung dieser Gleichungen geht hervor, dass die gemeinschaftlichen Wurzeln, die von $x = 1$ und $x = h$ verschieden sind, vielfache Wurzeln sein müssen. In Folge dessen können diese Gleichungen für $2n + 2$ verschiedene Werthe von x nicht gleichzeitig stattfinden, ohne $4n + 2$ gemeinschaftliche Wurzeln, gleiche oder verschiedene, zu besitzen. Diess setzt aber ihre Identität voraus, da sie nach dem eben auseinandergesetzten vom $4n + 2^{\text{ten}}$ Grade sind. Identisch können diese Gleichungen sein, nur wenn

$$(l^2 - y^2)(1 - l^2 y^2) = C\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 x(1 - x)(h - x),$$

wo C eine Constante bedeutet. Hieraus geht dann die folgende Differentialgleichung hervor:

$$(2) \qquad \sqrt{C}\,\frac{dy}{\sqrt{(l^2 - y^2)(1 - l^2 y^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)(h - x)}}.$$

Unter den verschiedenen Functionen y, welche dieser Gleichung für irgend welche Constanten l und C genügen, ist es nicht schwer diejenige

zu unterscheiden, welche zur Lösung unserer Aufgabe führt. Zu dem Zwecke bemerken wir, dass laut (1)

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

zu einer Gleichung $2n^{\text{ten}}$ Grades führt; von $x = 0$ bis $x = \infty$ kann daher die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ nur $2n$ Mal Null werden. Da sie aber nach dem angeführten im Intervalle

$$x = 1, \qquad x = h$$

wenigstens $2n$ Mal Null wird, so kann sie in den Intervallen

$$x = 0, \qquad x < 1$$

und

$$x > h, \qquad x = \infty$$

kein einziges Mal Null werden; und sie muss zwischen

$$x = 1, \qquad x = h$$

genau $2n$ Mal Null werden. Aus der Gleichung (2) erhält man demnach zwischen den Integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(h-x)}}, \qquad \int_1^h \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(h-x)}},$$

$$\int_0^l \frac{dy}{\sqrt{(l^2-y^2)(1-l^2y^2)}}, \qquad \int_l^{\frac{1}{l}} \frac{dy}{\sqrt{(y^2-l^2)(1-l^2y^2)}}$$

die folgenden Verhältnisse:

$$(3) \qquad \frac{\int_0^l \frac{dy}{\sqrt{(l^2-y^2)(1-l^2y^2)}}}{\int_l^{\frac{1}{l}} \frac{dy}{\sqrt{(y^2-l^2)(1-l^2y^2)}}} = (2n+1)\frac{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(h-x)}}}{\int_1^h \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(h-x)}}}.$$

§ 3. Auf Grund dieser Gleichung kann man die Grösse l mittelst des Verhältnisses zwischen den Integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(h-x)}}, \qquad \int_1^h \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(h-x)}}$$

leicht ermitteln.

Von den verschiedenen Formeln, die dazu dienen können, wollen wir im vorliegenden Falle die folgende benutzen

$$(4) \qquad l^4 = 1 - 16q^{2n+1}\left(\frac{1 + q^{4n+2} + q^{12n+6} + \dots}{1 + q^{2n+1} + q^{6n+3} + \dots}\right)^8$$

$$= 1 - 16q^{2n+1}\left(\frac{\sum\limits_{i=-\infty}^{i=+\infty} q^{2(2n+1)i(2i+1)}}{\sum\limits_{i=-\infty}^{i=+\infty} q^{(2n+1)i(2i+1)}}\right)^8,$$

wo

$$q = e^{-\pi \frac{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(h-x)}}}{\int_1^h \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(h-x)}}}}.$$

Diese Formel zeigt, wie l und $\frac{1}{l}$ bei wachsendem n sich der Einheit rasch nähern, und wie in Folge dessen die relativen Fehler der Formel

$$A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \dots + \frac{B_n}{C_n + x},$$

welche eine Annäherung des Radicales $\sqrt{\frac{1}{x}}$ darstellt, rasch abnehmen.

Indem wir durch θ eine Grösse, die zwischen 0 und 1 liegt, bezeichnen, so stellt $l^{2\theta-1}$ alle Werthe zwischen l und $\frac{1}{l}$ dar. Hiernach finden wir mit Rücksicht auf die erwähnte Beschaffenheit der Function

$$y = \sqrt{x}\left[A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \dots + \frac{B_n}{C_n + x}\right]$$

die folgende Gleichung zur Bestimmung des Werthes des Radicales $\sqrt{\frac{1}{x}}$:

$$(5) \qquad \sqrt{\frac{1}{x}} = l^{1-2\theta}\left[A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \dots + \frac{B_n}{C_n + x}\right].$$

§ 4. Die Grössen

$$A, B_1, B_2, \dots, B_n, \qquad C_1, C_2, \dots, C_n,$$

welche in dieser Formel auftreten, können leicht ermittelt werden, und zwar mittelst des Integrales der Gleichung (2), das mit Rücksicht auf (3) erhalten wird. Denn schreiben wir dieses Integral unter der Form

$$y = \sqrt{x}\left[A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \dots + \frac{B_n}{C_n + x}\right],$$

so finden wir, dass hier die Grössen

$$A, B_1, B_2, \dots, B_n, \qquad C_1, C_2, \dots, C_n$$

mit Hülfe von elliptischen Functionen mit dem Modul

$$(6) \qquad k = \sqrt{1 - \frac{1}{h}}$$

und mit Anwendung der bekannten Bezeichnung

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

sich durch folgende Formeln darstellen lassen:

$$A = \frac{1}{l\sqrt{h}\left[1 + 2\,\mathrm{dn}\frac{2K}{2n+1} + 2\,\mathrm{dn}\frac{4K}{2n+1} + \dots + 2\,\mathrm{dn}\frac{2nK}{2n+1}\right]},$$

$$B_m = \frac{2\sqrt{h}\,\mathrm{dn}\frac{2mK}{2n+1}}{l\,\mathrm{sn}^2\frac{2mK}{2n+1}\left[1 + 2\,\mathrm{dn}\frac{2K}{2n+1} + \dots + 2\,\mathrm{dn}\frac{2nK}{2n+1}\right]},$$

$$C_m = \frac{\mathrm{cn}^2\frac{2mK}{2n+1}}{\mathrm{sn}^2\frac{2mK}{2n+1}}\,h.$$

Bemerken wir, dass

$$\operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}$$

für $m = 0$ in die Einheit übergeht und den Werth nicht ändert, wenn m durch $-m$ ersetzt wird, so können wir die Summe

$$1 + 2\operatorname{dn}\frac{2K}{2n+1} + 2\operatorname{dn}\frac{4K}{2n+1} + \ldots + 2\operatorname{dn}\frac{2nK}{2n+1}$$

unter der Form

$$\sum \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}$$

schreiben, wo angenommen wird, dass die Summe sich über alle Werthe

$$m = -n\,,\ -(n-1)\,,\ \ldots,\ -1\,, 0\,, 1\,,\ \ldots,\ n-1\,,\ n$$

erstreckt. Demzufolge erhalten wir

$$A = \frac{1}{l\sqrt{h}\sum \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}\,, \qquad B_m = \frac{2\sqrt{h}\operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}{l\operatorname{sn}^2\frac{2mK}{2n+1}\sum \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}$$

und

$$\frac{B_m}{C_m + x} = \frac{2\sqrt{h}\operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}{l\operatorname{sn}^2\frac{2mK}{2n+1}\sum \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}\cdot\frac{1}{\frac{\operatorname{cn}^2\frac{2mK}{2n+1}}{\operatorname{sn}^2\frac{2mK}{2n+1}}h + x}$$

$$= \frac{2\operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}{l\sum \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}\cdot\frac{\sqrt{h}}{x\operatorname{sn}^2\frac{2mK}{2n+1} + h\operatorname{cn}^2\frac{2mK}{2n+1}}.$$

Weil der Ausdruck

$$\frac{\operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}{\sum \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}\cdot\frac{\sqrt{h}}{x\operatorname{sn}^2\frac{2mK}{2n+1} + h\operatorname{cn}^2\frac{2mK}{2n+1}}$$

für $m = 0$ in

$$\frac{1}{l\sqrt{h}\sum \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}} = A$$

übergeht und unverändert bleibt, wenn m das Zeichen ändert, so giebt er, indem man über alle die Werthe

$$m = -n\,,\ -(n-1)\,,\ \ldots\,,\ -1\,, 0\,, 1\,,\ \ldots\,,\ n-1\,, n,$$

summirt, die Summe

$$A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n + x}.$$

Folglich ergiebt sich aus der Gleichung (5) folgende Formel zur Bestimmung des Radicales $\sqrt{\frac{1}{x}}$, vorausgesetzt, dass x die Grenzen $x = 1$, $x = h$ nicht überschreitet:

$$(7) \qquad \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{\sum \dfrac{\sqrt{h}\operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}{x\operatorname{sn}^2\frac{2mK}{2n+1} + h\operatorname{cn}^2\frac{2mK}{2n+1}}}{l^{20}\sum \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}.$$

§ 5. Aus der Gleichung (7) ist es nicht schwer eine Formel abzuleiten, welche die Grenzwerthe des Integrales

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}}\,du$$

giebt, und zwar mit Hülfe von Integralen, welche die Function V ausserhalb des Radicalzeichens enthalten. Dazu ist nothwendig, dass die Functionen U und V für alle Werthe der Veränderlichen u zwischen den Integrationsgrenzen positiv bleiben.

Wenn durch

$$M\,, M_0 < M$$

die Grenzen bezeichnet werden, welche die Function V dabei nicht überschreitet, so bleibt

$$\frac{V}{M_0}$$

zwischen den Grenzen

$$1, \frac{M}{M_0}$$

eingeschlossen, oder zwischen den Grenzen

$$1, h$$

indem

$$h = \frac{M}{M_0}$$

gesetzt wird. Hieraus geht hervor, dass für alle Werthe von u, über welche das Integral

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}} du$$

ausgedehnt wird, die Gleichung (7) für

$$x = \frac{V}{M_0}$$

anwendbar ist, wenn

$$h = \frac{M}{M_0}.$$

Führen wir also diese Ausdrücke für x und h in (7) ein, so ergiebt sich

$$\sqrt{\frac{M_0}{V}} = \frac{\sum \frac{\sqrt{M_0 M}\,\mathrm{dn}\frac{2mK}{2n+1}}{V\,\mathrm{sn}^2\frac{2mK}{2n+1} + M\,\mathrm{cn}^2\frac{2mK}{2n+1}}}{l^{2n}\sum \mathrm{dn}\frac{2mK}{2n+1}}$$

oder nach Theilung durch $\sqrt{M_0}$:

$$\sqrt{\frac{1}{V}} = \frac{\sum \frac{\sqrt{M}\,\mathrm{dn}\frac{2mk}{2n+1}}{V\,\mathrm{sn}^2\frac{2mK}{2n+1} + M\,\mathrm{cn}^2\frac{2mK}{2n+1}}}{l^{2n}\sum \mathrm{dn}\frac{2mK}{2n+1}}.$$

Da der Annahme gemäss die Function U für alle Werthe von u, über welche das Integral

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}} du$$

sich erstreckt, positiv bleibt, so erhält man aus dieser Gleichung

$$(8) \qquad \int \frac{U}{\sqrt{V}} du = \frac{\sum \int \dfrac{\sqrt{M} \operatorname{dn} \frac{2mK}{2n+1} U du}{V \operatorname{sn}^2 \frac{2mK}{2n+1} + M \operatorname{cn}^2 \frac{2mK}{2n+1}}}{l^{2n} \sum \operatorname{dn} \frac{2mK}{2n+1}}.$$

Weil

$$h = \frac{M}{M_0},$$

so wird mit Rücksicht auf (6)

$$(9) \qquad M_0 = M(1 - k^2).$$

Dies ist eine Relation zwischen

$$M, M_0,$$

— den Grenzwerthen, die die Function V bei der Integration nicht überschreiten darf — und dem Modul

$$k,$$

der zur Bildung der Formel (8) und der Gleichung (4) dient.

Indem wir der Kürze halber

$$\operatorname{sn} \frac{2mK}{2n+1}$$

durch

$$s_m$$

bezeichnen, erhalten wir

$$\operatorname{cn} \frac{2mK}{2n+1} = \sqrt{1 - s_m^2}, \qquad \operatorname{dn} \frac{2mK}{2n+1} = \sqrt{1 - k^2 s_m^2},$$

$$\sum \operatorname{dn} \frac{2mK}{2n+1} = 1 + 2\sqrt{1 - k^2 s_1^2} + 2\sqrt{1 - k^2 s_2^2} + \ldots + 2\sqrt{1 - k^2 s_n^2}.$$

Setzen wir ferner

$$(10)\qquad S = 1 + 2\sqrt{1 - k^2 s_1^2} + 2\sqrt{1 - k^2 s_2^2} + \ldots + \sqrt{1 - k^2 s_n^2}$$

und

$$(11)\qquad F(s) = \frac{\sqrt{M}\sqrt{1 - k^2 s^2}}{S} \int \frac{U du}{V s^2 + M(1 - s^2)},$$

so wird die Gleichung (8)

$$(12)\qquad \int \frac{U}{\sqrt{V}} du = \frac{1}{l^{2\theta}} [F(0) + 2F(s_1) + 2F(s_2) + \ldots + 2F(s_n)].$$

Weil die Grösse θ zwischen 0 und 1 eingeschlossen ist, so giebt diese Gleichung die folgenden beiden Ausdrücke für die Grenzwerthe des Integrales

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}} du:$$

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}} du \overline{>} F(0) + 2F(s_1) + 2F(s_2) + \ldots + 2F(s_n),$$

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}} du \overline{<} \frac{1}{l^2} [F(0) + 2F(s_1) + 2F(s_2) + \ldots + 2F(s_n)],$$

wo die Grösse l gemäss der Gleichung (4) bestimmt wird, aus der hervorgeht, dass l, bei wachsendem n, der Einheit sich rasch nähert.

§ 6. Indem wir jetzt zur Anwendung der abgeleiteten Formeln übergehen, beginnen wir mit dem Falle

$$U = 1, \qquad V = 1 - \lambda^2 \sin^2 u$$

wo $\lambda < 1$. Die untere Grenze des Integrales

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}} du = \int \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}$$

möge 0 sein; alsdann wird der grösste Werth der Function

$$V = 1 - \lambda^2 \sin^2 u$$

innerhalb der Integrationsgrenzen 1 sein, und daher können wir in Übereinstimmung mit unserer Annahme über die Bezeichnung setzen

$$M = 1.$$

Die Gleichung (9) giebt nun

$$M_0 = 1 - k^2,$$

wo M_0 die untere Grenze von

$$V = 1 - \lambda^2 \sin^2 u$$

bedeutet, für welche die Formel (12) anwendbar ist. Da die Function V für die Werthe der Veränderlichen u, über welche das Integral

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}$$

sich erstreckt, über die Grenze M_0 nicht hinausgehen darf, so muss für alle diese Werthe von u

$$1 - \lambda^2 \sin^2 u \geqq 1 - k^2$$

und folglich

$$\sin u \leqq \frac{k}{\lambda}.$$

Wenn

$$\lambda \leqq k,$$

so wird diese Bedingung offenbar für jeden reellen Werth von u erfüllt. Für den Fall

$$\lambda \leqq k$$

kann also die Formel (12) auf das Integral

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}$$

angewandt werden, wie gross u auch sein mag.

Im Falle

$$\lambda > k$$

wird dieser Bedingung genügt nur von solchen Werthen von u, die

$$\arcsin \frac{\lambda}{k}$$

nicht überschreiten; folglich können dann unsere Formeln auf das Integral

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}$$

angewandt werden, nur wenn der Bedingung

$$u \overline{\overline{<}} \arcsin \frac{\lambda}{k}$$

genüge geleistet wird.

Wenn wir in der Formel (11)

$$U = 1, \qquad V = 1 - \lambda^2 \sin^2 u, \qquad M = 1$$

setzen und 0 als untere Integrationsgrenze nehmen, so finden wir im vorliegenden Falle

$$F(s) = \frac{\sqrt{1 - k^2 s^2}}{S} \int_0^u \frac{du}{(1 - \lambda^2 \sin^2 u) s^2 + 1 - s^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - k^2 s^2}}{S \sqrt{1 - \lambda^2 s^2}} \operatorname{arc\,tang} (\sqrt{1 - \lambda^2 s^2} \operatorname{tang} u).$$

Mit Hülfe dieser Function so wie der Grössen

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, S$$

die durch eine elliptische Function (§ 5) mit dem Modul k bestimmt werden, finden wir mit Rücksicht auf (12) eine Gleichung, welche die Grenzwerthe des Integrales

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}$$

geben, Grenzwerthe, die bei wachsendem n sich einander sehr rasch nähern.

§ 7. Bei der speciellen Annahme

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

wird

$$q = e^{-\pi},$$

und die Gleichung (4), durch welche die Grösse l für die verschiedenen Werthe von n bestimmt wird, geht in die folgende über:

$$l^4 = 1 - 16 e^{-(2n+1)\pi} \left(\frac{1 + e^{-(4n+2)\pi} + e^{-(12n+6)\pi} + \ldots}{1 + e^{-(2n+1)\pi} + e^{-(6n+3)\pi} + \ldots} \right)^8.$$

Diese Gleichung giebt für

$$n = 1, 2, \ldots$$

resp.

$$l^2 = 0.9993549,$$

$$l^2 = 0.9999988,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

woraus zu ersehen ist, wie die Grenzwerthe des Integrales

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}},$$

die mit Hülfe der Gleichung (12) erhalten werden, bei wachsendem n sich einander rasch nähern.

Setzen wir nun

$$n = 1$$

so erhalten wir

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}} = \frac{1}{l^{2n}} [F(0) + 2F(s_1)].$$

Für

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}}, \qquad n = 1$$

geht die Gleichung, welche S bestimmt, über in

$$S = 1 + 2\sqrt{1 - \frac{1}{2}s_1^2}$$

und

$$\operatorname{sn}\frac{2K}{3} = s_1$$

wird gleich 0.9002226; daher finden wir

$$S = 2.5424652.$$

Für $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ gestaltet sich also (11) folgendermassen

$$F(s) = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}s^2}\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{1 - \lambda^2 s^2}\operatorname{tang} u\right)}{2.5424652\sqrt{1 - \lambda^2 s^2}}.$$

Setzen wir hier

$$s = 0, \qquad s = s_1 = 0.9002226,$$

so bekommen wir

$$F(0) = 0.3933195u,$$

$$F(s_1) = \frac{0.3033402\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{1 - 0.8104007\lambda^2}\operatorname{tang} u\right)}{\sqrt{1 - 0.8104007\lambda^2}}.$$

Diese Ausdrücke, in die Gleichung (12) eingeführt, geben folgende Formel zur Bestimmung des Integrales

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}:$$

$$\frac{1}{l^{2\theta}}\left[0.3933195u + \frac{0.6066804\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{1 - 0.8104007\lambda^2}\operatorname{tang} u\right)}{\sqrt{1 - 0.8104007\lambda^2}}\right].$$

Für

$$n = 2$$

geht die Gleichung (12) im vorliegenden Falle über in

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}} = \frac{1}{l^{20}}\left[Au + \frac{B_1}{R_1}\operatorname{arc\,tang}(R_1 \operatorname{tang} u) + \frac{B_2}{R_2}\operatorname{arc\,tang}(R_2 \operatorname{tang} u)\right].$$

wo

$$A = 0.2360679, \qquad B_1 = 0.4188060, \qquad B_2 = 0.3451258,$$

$$R_1 = \sqrt{1 - 0.4262987\lambda^2}, \qquad R_2 = \sqrt{1 - 0.9313130\lambda^2}.$$

Ähnliche Formeln in Bezug auf das Integral

$$\int_0^u \frac{1 + p\sin^2 u}{1 + q\sin^2 u}\frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}$$

werden aus (12) erhalten, wenn gesetzt wird:

$$U = \frac{1 + p\sin^2 u}{1 + q\sin^2 u}, \qquad V = 1 - \lambda^2\sin^2 u.$$

§ 8. Wenn wir in (12) für U und V verschiedene Functionen nehmen, so erhalten wir Formeln zur Bestimmung der Grenzwerthe von Integralen von der Form

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}}du,$$

deren Berechnung nicht selten grosse Schwierigkeiten darbietet. In der Weise finden wir für

$$V = 1 - \lambda^2\sin^2 u, \qquad U = \Phi(\operatorname{tang} u),$$

wo $\Phi(\operatorname{tang} u)$ eine Function ist, die das Zeichen + innerhalb der Integrationsgrenzen behält:

$$\int_0^u \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}du = \frac{1}{l^{2n}}[F(0) + 2F(s_1) + 2F(s_2) + \ldots + 2F(s_n)],$$

wo

$$F(s) = \frac{\sqrt{1 - k^2 s^2}}{S} \int_0^u \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)}{1 - \lambda^2 s^2 \sin^2 u} du.$$

Nach dem, was im § 6 bemerkt wurde, finden diese Formeln für jedes u statt, wenn

$$\lambda \leqq k.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt wird, und $\frac{\pi}{2}$ als obere Grenze genommen, so leiten wir aus diesen Formeln die folgende ab:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}} du = \frac{1}{l^{2 \theta}} [F(0) + 2F(s_1) + 2F(s_2) + \ldots + 2F(s_n)],$$

$$F(s) = \frac{\sqrt{1 - k^2 s^2}}{S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)}{1 - \lambda^2 s^2 \sin^2 u} du.$$

Setzen wir im letzten Integrale

$$\operatorname{tang} u = z,$$

so lässt sich dasselbe schreiben:

$$\int_0^{\infty} \frac{\Phi(z)\,dz}{1 + (1 - \lambda^2 s^2) z^2}.$$

Demnach geht die Gleichung (11), welche die Function $F(s)$ bestimmt, im vorliegenden Falle über in

$$F(s) = \frac{\sqrt{1 - k^2 s^2}}{S} \int_0^{\infty} \frac{\Phi(z)\,dz}{1 + (1 - \lambda^2 s^2) z^2}.$$

Hieraus erhellt, dass die Formel, die wir zur Bestimmung des Integrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}} du$$

erhalten haben, nur Integrale von der Form

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(z)\,dz}{1 + (1 - \lambda^2 s^2) z^2}$$

enthält. Die Ausdrücke für diese Integrale sind für gewisse specielle Annahmen über die Function $\Phi(z)$ bekannt.

Beispielsweise für den Fall

$$\Phi(z) = z^{p-1}, \qquad 0 < p < 1,$$

finden wir

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(z)\,dz}{1 + (1 - \lambda^2 s^2) z^2} = \int_0^\infty \frac{z^{p-1}\,dz}{1 + (1 - \lambda^2 s^2) z^2} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{p\pi}{2} (1 - \lambda^2 s^2)^{\frac{p}{2}}},$$

und zur Bestimmung des Integrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)\,du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u\,du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}$$

werden wir dann nach (12) haben:

$$F(s) = \frac{\pi \sqrt{1 - k^2 s^2}}{2 \sin \frac{p\pi}{2} (1 - \lambda^2 s^2)^{\frac{p}{2}} S},$$

und folglich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u\,du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}} = \frac{\pi}{2} \frac{1 + 2\sqrt{\frac{1 - k^2 s_1^2}{(1 - \lambda^2 s_1^2)^p}} + \ldots + 2\sqrt{\frac{1 - k^2 s_n^2}{(1 - \lambda^2 s_n^2)^p}}}{l^{2\theta} \sin \frac{p\pi}{2} S}.$$

Führen wir hier den Ausdruck (10) für S ein, so erhalten wir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u\,du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{l^{2\theta} \sin \frac{p\pi}{2}} \cdot \frac{1 + 2\sqrt{\frac{1 - k^2 s_1^2}{(1 - \lambda^2 s_1^2)^p}} + \ldots + 2\sqrt{\frac{1 - k^2 s_n^2}{(1 - \lambda^2 s_n^2)^p}}}{1 + 2\sqrt{1 - k^2 s_1^2} + \ldots + 2\sqrt{1 - k^2 s_n^2}}.$$

In dem speciellen Falle, wo $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $n = 1$ angenommen werden, giebt diese Gleichung mit Rücksicht auf

$$s_1 = \mathrm{sn}\frac{2K}{3} = 0.9002226$$

zur Bestimmung des Integrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tang}^{p-1} u\, du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}$$

für $\lambda \overline{\overline{<}} \sqrt{\frac{1}{2}}$ die folgende Formel

$$\frac{\frac{1}{2}\pi}{l^{2n}\sin\frac{p\pi}{2}}\left[0.3933195 + \frac{0.6066805}{(1 - 0.8104007\lambda^2)^{\frac{p}{2}}}\right],$$

wo

$$l^2 = 0.9993549.$$

Setzen wir $n = 2$, mit Beibehaltung desselben Moduls, so finden wir zur Bestimmung des Integrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tang}^{p-1} u\, du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}$$

im Falle

$$\lambda \overline{\overline{<}} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

die Formel

$$\frac{\frac{1}{2}\pi}{l^{2n}\sin\frac{p\pi}{2}}\left[0.2360679 + \frac{0.4188060}{(1 - 0.4262987\lambda^2)^{\frac{p}{2}}} + \frac{0.3451258}{(1 - 0.9313130\lambda^2)^{\frac{p}{2}}}\right],$$

wo

$$l^2 = 0.9999988.$$

SUR UNE CLASSE DE TRANSCENDANTES NOUVELLES

PAR

EMILE PICARD

à PARIS.

(Premier mémoire.)

Je me propose, dans ce travail, de démontrer l'existence d'une classe de transcendantes nouvelles qui généraliseront les fonctions doublement périodiques. Les fonctions que nous allons considérer admettent toutes une période Ω, mais le changement de z en $z + \Omega'$ modifie les fonctions de la manière suivante. Soit

$$\begin{aligned} u' &= R_1(u, v, \ldots, w), \\ v' &= R_2(u, v, \ldots, w), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w' &= R_m(u, v, \ldots, w), \end{aligned}$$

une substitution *birationnelle* quelconque, relative à m lettres $u, v, \ldots, w$. Je me propose de montrer qu'*il existe une infinité de systèmes de m fonctions*

$$f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)$$

uniformes dans tout le plan, n'ayant que des discontinuités polaires, et jouissant des propriétés suivantes:

Elles admettent la période Ω, et on a, par le changement de z en $z + \Omega'$

$$\begin{aligned} f(z + \Omega') &= R_1[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)], \\ \varphi(z + \Omega') &= R_2[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi(z + \Omega') &= R_m[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)]. \end{aligned}$$

(Dans la suite, pour la commodité des calculs, nous poserons, ce qui ne diminue en rien la généralité: $\Omega = \omega' i$, $\Omega' = \omega$, en désignant par ω et ω' des quantités réelles positives.)

On trouvera simplement, dans ce premier mémoire, avec quelques propositions auxiliaires qui ne sont pas par elles-mêmes sans intérêt, la démonstration de l'existence des transcendantes dont je viens de parler. Le mode de démonstration employé me paraît digne d'attention; j'applique à un problème relatif à la théorie des fonctions ces méthodes d'approximations successives si fécondes dans la théorie des équations différentielles ordinaires et des équations aux dérivées partielles, méthodes d'autant plus intéressantes qu'on peut varier presque à l'infini les conditions de leur application, et je ne doute pas que des considérations plus ou moins analogues à celles dont je fais ici usage ne puissent être utilisées pour démontrer l'existence d'autres classes de fonctions.

C'est la considération de certaines équations différentielles ordinaires se rattachant aux travaux de M. Sophus Lie sur les groupes de transformations qui m'a conduit à l'étude des transcendantes précédentes: c'est un sujet que j'aborderai dans un second mémoire. On trouvera un résumé très succinct de ces recherches dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (9 et 30 octobre 1893).

I.

1. Considérons m polynomes

$$P_1(u, v, \ldots, w), \quad P_2(u, v, \ldots, w), \quad \ldots, \quad P_m(u, v, \ldots, w)$$

dépendant de m variables $u, v, \ldots, w$. On suppose que ces polynomes s'annulent pour

$$u = v = \ldots = w = 0.$$

Soient ω et ω' deux constantes réelles et positives données. *Nous nous proposons d'abord de faire voir qu'on peut trouver une infinité de systèmes de m fonctions analytiques*

$$f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)$$

de la variable complexe x, uniformes à droite de l'axe Oy (on pose $z = x + iy$), admettant la période $\omega' i$ et enfin satisfaisant aux équations fonctionnelles suivantes:

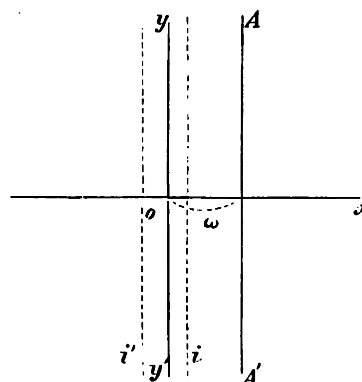
$$f(z+\omega) = P_1[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)],$$
$$\varphi(z+\omega) = P_2[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi(z+\omega) = P_m[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)].$$

2. Démontrons d'abord un premier lemme qui va jouer dans notre analyse un rôle fondamental. Je désigne par $f(z)$ et $P(z)$ deux fonctions uniformes dans tout le plan, ayant $\omega' i$ pour période. En outre on a l'identité

$$f(z+\omega) = \mu f(z) + P(z),$$

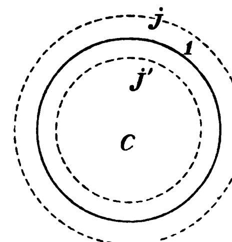
μ étant une constante, qui ne satisfait pas à une relation que nous écrirons dans un moment. De plus, ayant tracé une suite de bandes parallèles à Oy et d'épaisseur ω, on suppose que $f(z)$ est holomorphe dans la première bande (et un peu à droite et à gauche de cette bande), tandis qu'on suppose seulement $P(z)$ holomorphe dans une bande étroite ii' contenant Oy. Soit dans cette dernière bande,

Fig. 1.



$$P(z) = \sum\left(A_\nu x^\nu + \frac{B_\nu}{x^\nu}\right)$$

Fig. 2.



en posant $x = e^{\frac{2\pi z}{\omega'}}$. Dans le plan de la variable x, nous aurons la convergence dans la couronne comprise entre deux circonférences j et j', à l'intérieur de laquelle se trouve la circonférence de rayon *un*. Supposons que dans cette couronne et sur les circonférences j et j' elles-mêmes, le maximum du module de $P(z)$ soit M. Il est facile d'avoir le développement de $f(z)$; soit:

$$f(z) = \sum\left(A'_\nu x^\nu + \frac{B'_\nu}{x^\nu}\right).$$

Nous poserons $e^{\frac{2\pi\omega}{\omega'}} = \lambda$; on a alors

$$A'_\nu(\lambda^\nu - \mu) = A_\nu, \qquad B'_\nu\left(\frac{1}{\lambda^\nu} - \mu\right) = B_\nu.$$

Nous supposons que, pour aucune valeur de l'entier positif ν, on n'ait

$$\text{soit } \mu = \lambda^\nu, \qquad \text{soit } \mu = \frac{1}{\lambda^\nu}.$$

Remplaçant enfin λ par $\frac{1}{\theta}$ $(\theta < 1)$, nous avons

$$A'_\nu = \frac{\theta^\nu}{1 - \mu\theta^\nu} A_\nu, \qquad B'_\nu = \frac{B_\nu}{\theta^\nu - \mu}.$$

On a donc

$$f(z) = \sum \frac{\theta^\nu}{1 - \mu\theta^\nu} A_\nu x^\nu + \frac{B_\nu}{\theta^\nu - \mu} \frac{1}{x^\nu},$$

ce que l'on peut écrire

$$f(z) = -\frac{1}{\mu} \sum \frac{B_\nu}{x^\nu} + \sum \frac{A_\nu \theta^\nu x^\nu}{1 - \mu\theta^\nu} + \sum \frac{B_\nu \theta^\nu}{\mu(\theta^\nu - \mu) x^\nu}.$$

Je dis que nous allons pouvoir trouver une limite de $|f(z)|$ sur les circonférences j et j'. Prenons d'abord la circonférence extérieure j. Les trois séries, dont la somme est égale à $f(z)$, convergent toutes sur cette circonférence. D'autre part A_ν et B_ν ont des modules moindres respectivement que

$$\frac{M}{\rho^\nu} \quad \text{et} \quad M\rho'^\nu$$

en désignant par ρ et ρ' les rayons des circonférences j et j'. On peut donc certainement fixer un nombre a, *indépendant de M,* tel que l'on ait

$$|f(z)| < a . M, \qquad \text{(sur la circonférence } j)$$

a dépend seulement de ω, ω', μ et de la position des droites i et i'.

Examinons maintenant la circonférence j'. Nous écrirons $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = -\frac{1}{\mu} P(z) + \frac{1}{\mu} \sum A_\nu x^\nu + \sum \frac{A_\nu \theta^\nu x^\nu}{1 - \theta^\nu} + \sum \frac{B_\nu \theta^\nu}{\mu(\theta^\nu - \mu) x^\nu}.$$

Les trois séries du second membre convergent sur j', et on a de suite une limite supérieure de leur module en remplaçant A_ν et B_ν par leur module maximum; quant à $P(z)$, il a pour module maximum M. On pourra donc trouver une constante a' ne dépendant pas de M et telle que l'on ait

$$|f(z)| < a'.M \qquad \text{(sur la circonférence } j'\text{)}.$$

En désignant par a la plus grande des deux constantes positives a et a' nous aurons

$$|f(z)| < a.M$$

sur les circonférences j et j', et, par suite, dans l'aire annulaire limitée par ces circonférences. Nous avons donc le premier lemme que nous voulions établir. *On peut trouver une constante a telle que l'on ait dans la bande ii'*

$$|f(z)| < a.M,$$

a ne dépendant pas de M, mais seulement de ω, ω', μ et de la position des droites i et i'.

3. Un second lemme nous sera encore utile. Soient

$$f(x, y, \ldots, t),\ \varphi(x, y, \ldots, t),\ \ldots,\ \psi(x, y, \ldots, t),$$

m fonctions des m lettres $x, y, \ldots, t$ holomorphes dans le voisinage de $x = y = \ldots = t = 0$ et s'annulant pour ces valeurs. Nous considérons la transformation

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = f(x, y, \ldots, t), \\ y' = \varphi(x, y, \ldots, t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z' = \psi(x, y, \ldots, t). \end{cases}$$

On peut, en général, par une substitution linéaire convenable faire en sorte que les termes du premier degré dans $f, \varphi, \ldots, \psi$ se réduisent respectivement à

$$\mu x,\ \nu y,\ \ldots,\ \pi t.$$

Faisons donc cette hypothèse, et soit depuis $|\mu| < 1$, $|\nu| < 1$, ..., $|\pi| < 1$. Nous voulons faire la remarque à peu près évidente que, *partant d'un système de valeurs* $(x, y, \ldots, t)$ *suffisamment voisines de zéro et effectuant un nombre indéfini de fois la substitution* (1), *les valeurs de* $x, y, \ldots, t$ *auront zéro pour limites.*

La démonstration est immédiate. Soit λ le module maximum de $\mu, \nu, \ldots, \pi$ $(\lambda < 1)$, et désignons par M le module maximum des fonctions

$$f - \mu x, \ \varphi - \nu y, \ \ldots, \ \psi - \pi t$$

quand $x, y, \ldots, t$ reste à l'intérieur du cercle de rayon r ayant l'origine pour centre. Il suffira de faire la démonstration pour la transformation

$$x' = \lambda x + \frac{M}{1 - \frac{x + y + \ldots + t}{a}} - M - M\frac{x + y + \ldots + t}{a},$$

$$y' = \lambda y + \frac{M}{1 - \frac{x + y + \ldots + t}{a}} - M - M\frac{x + y + \ldots + t}{a},$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$t' = \lambda t + \frac{M}{1 - \frac{x + y + \ldots + t}{a}} - M - M\frac{x + y + \ldots + t}{a},$$

en donnant à $x, y, \ldots, t$ des valeurs réelles et positives. Or, dès la première transformation, les valeurs des différentes lettres deviennent égales, et nous sommes ramené par suite au cas d'une seule équation qui est bien connu, et est entièrement évident puisque de la relation

$$x' = \lambda x + \ldots$$

où λ est compris entre 0 et *un*, on conclut de suite, pour x suffisamment petit

$$x' < hx,$$

h étant compris entre λ et *un*. Donc au bout de n transformations successives, la valeur de x sera inférieure à

$$h^n x$$

et tendra par suite vers *zéro* quand n augmentera indéfiniment.

4. Nous pouvons maintenant aborder la démonstration du théorème énoncé au paragraphe 1. En laissant de côté certains cas exceptionnels, on peut supposer en faisant une substitution linéaire convenable que les termes du premier degré dans

$$P_1(u, v, \dots, w), \ P_2(u, v, \dots, w), \ \dots, \ P_m(u, v, \dots, w)$$

se réduisent respectivement à

$$\mu_1 u, \mu_2 v, \dots, \mu_m w$$

et écrivons

$$P_1 = \mu_1 u + Q_1, \qquad P_2 = \mu_2 v + Q_2, \quad \dots, \quad P_m = \mu_m w + Q_m$$

les polynomes Q commençant nécessairement par des termes du second degré.

Ceci admis, en réduisant les P à leur premier terme, nos équations fonctionnelles deviennent

$$f(z + \omega) = \mu_1 f(z),$$
$$\varphi(z + \omega) = \mu_2 \varphi(z),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi(z + \omega) = \mu_m \psi(z).$$

On peut y satisfaire en prenant pour $f, \varphi, \dots, \psi$ des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, admettant le multiplicateur *un* pour la période $\omega' i$ et respectivement les multiplicateurs $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ pour la période ω.

Choisissons, arbitrairement d'ailleurs, un système

$$f_0(z), \varphi_0(z), \dots, \psi_0(z)$$

de fonctions doublement périodiques de seconde espèce, ayant les mêmes pôles que nous supposerons simples dans un rectangle de périodes.

Ces fonctions vont nous servir de première approximation.

Nous traçons à droite de Oy, dans le plan de la variable z, des parallèles à cet axe distantes de ω, soit

$$x = \omega, 2\omega, \dots.$$

Nous avons ainsi une succession de bandes de largeur ω. Je considère alors les équations

$$(2)\quad \begin{cases} f_1(z+\omega) = \mu_1 f_1(z) + Q_1[f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z)], \\ \varphi_1(z+\omega) = \mu_2\varphi_2(z) + Q_2[f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z)], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_1(z+\omega) = \mu_m\psi_1(z) + Q_m[f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z)]. \end{cases}$$

Nous allons montrer qu'on peut trouver un système de fonctions uniformes $f_1(z), \varphi_1(z), \ldots, \psi_1(z)$ ayant la période $\omega' i$, satisfaisant à ces équations, et ayant *dans la première bande à droite de Oy* les mêmes pôles que $f_0(z), \ldots, \psi_0(z)$ (on peut supposer que ces dernières fonctions n'ont pas de pôles sur Oy) *avec les mêmes résidus.*

Faisons d'abord la démonstration en supposant que $f_0, \ldots, \psi_0$ n'ont qu'*un* pôle dans un rectangle de périodes. En désignant par p le degré des polynomes Q, nous pouvons satisfaire aux relations précédentes en prenant pour $f_1, \varphi_1, \ldots, \psi_1$ des polynomes de degré p en $f_0, \ldots, \psi_0$ et ne renfermant pas de terme du premier degré; ces relations détermineront dans ces polynomes les coefficients de tous les termes. Il ne pourrait y avoir d'impossibilité que si on avait une relation de la forme

$$\mu_1^{\nu_1}\mu_2^{\nu_2}\ldots\mu_m^{\nu_m} = \mu_i,$$

les ν étant des entiers positifs pour lesquels $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m \geqq 2$; *nous supposons qu'il n'existe pas entre les μ de relation de cette forme.* Au polynome trouvé pour f_1 on peut ajouter une fonction linéaire arbitraire de $f_0, \ldots, f_0^{(p-1)}$, soit

$$(\varepsilon)\quad \alpha_0 f_0(z) + \alpha_1 f_0'(z) + \ldots + \alpha_{p-1} f_0^{(p-1)}(z).$$

La première des relations (2) ne cessera pas d'être satisfaite, quelles que soient les constantes α. Nous les déterminons de manière que $f_1(z)$ ait pour pôles simples les pôles de $f_0(z)$ situés dans la première bande avec le même résidu. On opère de même pour chacune des autres fonctions $\varphi_1(z), \ldots, \psi_1(z)$, qui se trouvent alors complètement déterminées.

Nous venons de supposer, dans la résolution des équations fonctionnelles (2), que $f_0, \ldots, \psi_0$ n'avaient qu'un seul pôle dans un rectangle

de périodes. S'il y a plusieurs pôles, on détermine toujours de la même manière les polynomes de degré p en $f_0, \ldots, \psi_0$ ne renfermant pas de termes du premier degré, et au lieu d'ajouter ensuite une expression de la forme (ε) qui ne renfermerait pas assez de coefficients arbitraires, nous ajouterons l'expression générale d'une fonction doublement périodique de seconde espèce (aux multiplicateurs *un* et μ_1) décomposée en éléments simples et ayant pour pôles multiples d'ordre p les pôles de f_0. Nous pouvons alors disposer des coefficients de manière à avoir une fonction f_1 ayant pour pôles simples les pôles de f_0 avec les mêmes résidus respectifs.

Ayant ainsi déterminé $f_1, \varphi_1, \ldots, \psi_1$, nous continuons nos approximations. Des fonctions $f_1, \ldots, \psi_1$, on déduira des fonctions $f_2, \ldots, \psi_2$ absolument comme on a déduit $f_1, \ldots, \psi_1$ de $f_0, \ldots, \psi_0$. D'une manière générale, on a

$$f_n(z+\omega) = \mu_1 f_n(z) + Q_1[f_{n-1}(z), \varphi_{n-1}(z), \ldots, \psi_{n-1}(z)],$$

$$\varphi_n(z+\omega) = \mu_2 \varphi_n(z) + Q_2[f_{n-1}(z), \varphi_{n-1}(z), \ldots, \psi_{n-1}(z)],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_n(z+\omega) = \mu_m \psi_n(z) + Q_m[f_{n-1}(z), \varphi_{n-1}(z), \ldots, \psi_{n-1}(z)].$$

Tous les $f_n, \ldots, \psi_n$ ont respectivement les mêmes pôles que $f_0, \ldots, \psi_0$, *dans la première bande,* avec les mêmes résidus.

Nous devons maintenant nous poser la question suivante:

Ces approximations successives convergent-elles vers une limite? C'est là le point essentiel dans la démonstration, que nous allons maintenant examiner.

5. En posant d'une manière générale

$$f_n(z) = f_0(z) + F_n(z),$$

$$\varphi_n(z) = \varphi_0(z) + \Phi_n(z),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_n(z) = \psi_0(z) + \Psi_n(z)$$

on a pour les fonctions $F_n, \ldots, \Psi_n$, *fonctions holomorphes dans la première bande*

$$(3)\begin{cases} F_n(z+\omega) = \mu_1 F_n(z) + Q_1[f_0 + F_{n-1}, \varphi_0 + \Phi_{n-1}, \ldots, \psi_0 + \Psi_{n-1}], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Psi_n(z+\omega) = \mu_n \Psi_n(z) + Q_m[f_0 + F_{n-1}, \varphi_0 + \Phi_{n-1}, \ldots, \psi_0 + \Psi_{n-1}]. \end{cases}$$

Supposons que dans la bande ii' (fig. 1), on ait

$$|f_0(z)| < M, \ldots, |\psi_0(z)| < M$$

et pareillement

$$|F_{n-1}(z)| < M_{n-1}, \ldots, |\Psi_{n-1}(z)| < M_{n-1}.$$

Remplaçons d'autre part dans $Q_1, \ldots, Q_m$ chaque coefficient par son module et désignons par q le polynome ainsi obtenu; nous aurons alors en nous reportant au lemme du paragraphe 1 et gardant pour a la signification de ce paragraphe (on prend pour a le plus grand des m nombres que donne le lemme)

$$|F_n(z)| < a.q(M + M_{n-1}, M + M_{n-1}, \ldots, M + M_{n-1}),$$

et cette inégalité valable dans la bande ii' s'applique aussi à $\Phi_n(z), \ldots, \Psi_n(z)$. Si donc nous posons

$$M_n = a.q(M + M_{n-1}, \ldots, M + M_{n-1})$$

nous pourrons écrire:

$$|F_n(z)| < M_n, \ldots, |\Psi_n(z)| < M_n \text{ (dans la bande } ii').$$

Or considérons la transformation

$$(4) \qquad x' = a.q(M + x, M + x, \ldots, M + x)$$

et cherchons si cette transformation effectuée n fois de suite sur une lettre x conduit vers une limite quand n augmente indéfiniment. On doit, conformément au lemme du paragraphe 2, former l'équation

$$x = a.q(M + x, \ldots, M + x).$$

Or si M est suffisamment petit, cette équation aura une racine voicine de zéro, puisque q est un polynome en $(M + x)$ commençant par un terme du second degré; il est clair que cette racine sera de l'ordre de M^2. D'autre part la dérivée du second membre de (4) par rapport à x sera visiblement aussi pour cette racine de l'ordre de M^2 et par suite d'un module moindre que *un*, si M est assez petit. Par conséquent en prenant la valeur initiale de x elle-même assez petite, la succession des valeurs déduites par la répétition de (4), tendra vers une limite et par conséquent toutes ces valeurs resteront moindres qu'un nombre K. On a ici comme valeur initiale de x la quantité M_1 qui est de l'ordre de M^2; nous sommes donc assuré que le nombre K est très petit quand M est lui-même très petit. Nous pouvons donc écrire que l'on a, *quel que soit n*

$$|F_n(z)| < K, \ldots, |\Psi_n(z)| < K, \quad \text{(dans la bande } ii'\text{)}$$

K étant une constante très petite en même temps que M.

6. Nous allons maintenant faire voir que

$$F_n(z), \ldots, \Psi_n(z)$$

ont des limites, sous la condition que M soit assez petit. Nous avons

$$F_n(z+\omega) - F_{n-1}(z+\omega) = \mu_1(F_n(z) - F_{n-1}(z))$$
$$+ Q_1[f_0 + F_{n-1}, \ldots] - Q_1[f_0 + F_{n-2}, \ldots]$$

et des égalités analogues. Or, en s'appuyant sur les résultats du paragraphe précédent, on voit immédiatement que la différence qui forme les deux derniers termes du second membre est moindre que

$$\lambda . N_{n-1},$$

λ désignant une constante indépendante de n et tendant vers zéro en même temps que M; quant à N_{n-1}, il représente le maximum des valeurs absolues des différences

$$F_{n-1}(z) - F_{n-2}(z), \quad \Phi_{n-1}(z) - \Phi_{n-2}(z), \quad \ldots, \quad \Psi_{n-1}(z) - \Psi_{n-2}(z)$$

dans la bande ii'. La lemme du paragraphe (1) nous donne donc

$$\begin{aligned} &|F_n(z) - F_{n-1}(z)| < a\lambda . N_{n-1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \text{(dans la bande } ii'\text{)}. \\ &|\Phi_n(z) - \Phi_{n-1}(z)| < a\lambda . N_{n-1}, \end{aligned}$$

Ces inégalités sont fondamentales, et nous permettent d'achever la démonstration. On voit en effet que la série

$$F_1(z) + (F_2(z) - F_1(z)) + \dots + (F_n(z) - F_{n-1}(z)) + \dots$$

est convergente dans la bande ii', si on a

$$a\lambda < 1;$$

elle converge, dans ce cas, comme une progression géométrique décroissante. Or, l'inégalité précédente sera vérifiée si M est suffisamment petit: c'est là une condition que nous pouvons toujours réaliser, puisque les fonctions

$$f_0(z), \dots, \psi_0(z)$$

peuvent être multipliées par une constante arbitraire assez petite, avant de commencer le calcul des approximations successives. Nous arrivons donc alors à la conclusion suivante:

Quand n augmente indéfiniment, les fonctions

$$F_n(z), \Phi_n(z), \dots, \Psi_n(z)$$

convergent uniformément vers des limites

$$F(z), \Phi(z), \dots, \Psi(z),$$

z restant dans la bande ii'.

7. Les fonctions

$$F_n(z), \Phi_n(z), \dots, \Psi_n(z)$$

ayant des limites dans la bande ii', auront nécessairement aussi, d'après les relations (3), des limites dans la bande se déduisant de ii' par le changement de z en $z + \omega$. Ces limites notamment existeront sur la

droite AA' (fig. 1), par suite dans toute la bande (yy', AA') et enfin évidemment, d'après la manière même dont nous y arrivons, un peu à droite et un peu à gauche de cette bande. Revenant maintenant à

$$f_n(z) = f_0(z) + F_n(z),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi_n(z) = \psi_0(z) + \Psi_n(z)$$

nous voyons que les limites de

$$f_n(z), \ldots, \psi_n(z)$$

sont les fonctions cherchées; désignons-les par $f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)$. Elles sont définies dans la première bande et un peu au delà à droite de AA' (il est inutile de parler du côté gauche). Les équations fonctionnelles elles mêmes

$$f(z+\omega) = P_1[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)],$$
$$\varphi(z+\omega) = P_2[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi(z+\omega) = P_n[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)]$$

définissent les fonctions de proche en proche dans le demi-plan à droite de Oy. Les valeurs des fonctions dans les différentes bandes à droite de Oy sont bien respectivement *les prolongements analytiques* les unes des autres, puisque les limites trouvées pour la première bande étaient susceptibles de s'étendre un peu au delà en satisfaisant aux équations fonctionnelles. *Nous avons donc démontré le théorème énoncé au paragraphe premier.* Il est à peine besoin d'ajouter que les fonctions $f, \varphi, \ldots, \psi$ ne se réduisent pas à des constantes puisqu'elles ont des pôles dans la première bande.

II.

8. Quelques remarques sont nécessaires sur les hypothèses *d'inégalité* qu'exige la démonstration précédente.

D'abord, pour qu'on puisse appliquer le lemme du paragraphe 2, nous devons supposer que *l'égalité*

$$\mu_i = e^{\frac{2\nu\pi\omega}{\omega'}} \tag{5}$$

ne peut être vérifiée, ν étant un entier quelconque positif ou négatif, pour aucune valeur de i entre 1 *et m.*

Nous avons fait ensuite une seconde hypothèse (§ 4) consistant *dans l'impossibilité d'une relation de la forme*

$$\mu_1^{\nu_1}\mu_2^{\nu_2}\ldots\mu_m^{\nu_m} = \mu_i$$

les ν étant des entiers positifs pour lesquels $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m \geq 2$. Au fond *cette restriction est inutile;* nous l'avons faite pour pouvoir calculer plus facilement nos fonctions approchées, mais un peu d'attention suffit pour montrer qu'une telle égalité n'est la cause d'aucune véritable difficulté. Nous nous sommes trouvé en définitive au paragraphe 4 devant le problème suivant: en désignant par $\psi(z)$ une fonction de seconde espèce pour laquelle on a

$$\psi(z + \omega' i) = \psi(z), \qquad \psi(z + \omega) = \lambda\psi(z),$$

trouver une fonction uniforme $f(z)$ ayant la période $\omega' i$ et telle que

$$f(z + \omega) = \mu f(z) + \psi(z).$$

Le cas que nous avons examiné correspondait à $\lambda \neq \mu$. On a de suite en effet une solution de l'équation précédente, en prenant

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{\lambda - \mu}.$$

Cette solution ne convient plus si $\lambda = \mu$; mais il suffit de considérer ce cas comme un cas limite. L'élément simple servant à décomposer $\psi(z)$

est fonction de son pôle, d'un certain coefficient et de λ; pour des valeurs regardées comme numériques des divers pôles et des divers coefficients, il ne reste que λ de variable, et nous pouvons regarder $\psi(z)$ comme fonction de z et λ, soit

$$\psi(z, \lambda).$$

Au lieu de prendre la valeur écrite plus haut pour $f(z)$, on peut prendre

$$f(z) = \frac{\psi(z, \lambda) - \psi(z, \mu)}{\lambda - \mu}$$

et par suite pour $\lambda = \mu$, nous avons

$$f(z) = \frac{\partial \psi(z, \lambda)}{\partial \lambda}.$$

C'est une fonction uniforme de z avec la période $\omega' i$ et satisfaisant à la relation

$$f(z + \omega) = \lambda f(z) + \psi(z),$$

et que l'on pourra évidemment exprimer au moyen des transcendantes de la théorie des fonctions elliptiques.

En résumé, *nos hypothèses d'inégalité se réduisent donc à l'impossibilité de relations de la forme* (5).

9. Je ferai encore une remarque importante relativement à l'emploi des approximations successives pour obtenir les fonctions cherchées. Nous sommes parti des fonctions de seconde espèce

$$f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z).$$

Nous aurions pu partir de fonctions uniformes quelconques admettant la période $\omega' i$, holomorphes dans la bande ii', et admettant une file de pôles (supposés simples) dans la première bande (yy', AA'). Il nous faut, dans ces nouvelles conditions, compléter un peu le lemme du paragraphe 2. Reprenons l'équation fonctionnelle

$$f(z + \omega) = \mu f(z) + P(z),$$

$P(z)$ désignant une fonction uniforme de période $\omega' i$, et holomorphe dans la bande ii'. Existe-t-il une fonction uniforme, holomorphe entre i' et

AA', et qui satisfasse à l'équation fonctionnelle ci-dessus? Reprenons le développement

$$P(z) = \sum A_\nu e^{\frac{2\nu\pi z}{\omega'}} + B_\nu e^{-\frac{2\nu\pi z}{\omega'}}$$

valable dans la bande ii'. En posant

$$f(z) = \sum A'_\nu e^{\frac{2\nu\pi z}{\omega'}} + B'_\nu e^{-\frac{2\nu\pi z}{\omega'}},$$

et en admettant que $f(z)$ soit holomorphe entre i' et AA', nous pouvons avec l'équation fonctionnelle déterminer les coefficients de $f(z)$. On obtient ainsi (§ 2)

$$f(z) = \sum \frac{A_\nu}{1 - \mu\theta^\nu} e^{\frac{2\nu\pi}{\omega'}(z-\omega)} + \frac{B_\nu}{\theta^\nu - \mu} e^{-\frac{2\nu\pi}{\omega'}z}.$$

D'ailleurs en désignant par d et d' les distances de l'origine à la droite i et à la droite i', on a

$$|A_\nu| < \frac{M}{e^{\frac{2\nu\pi d}{\omega'}}}, \qquad |B_\nu| < M e^{-\frac{2\nu\pi d'}{\omega'}}.$$

Il en résulte que la série représentant $f(z)$ sera certainement convergente pour

$$-d' < x < \omega + d, \qquad (z = x + iy).$$

Ce résultat obtenu, il n'y a aucune modification essentielle à faire à la série de nos raisonnements. Les fonctions successives données par les approximations

$$f_n(z), \varphi_n(z), \ldots, \psi_n(z)$$

auront les mêmes pôles dans la première bande que $f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z)$. La convergence des approximations successives sera certaine, si $f_0, \ldots, \psi_0$ ont un module suffisamment petit, dans la bande ii' et dans celle qui s'en déduit par le changement de z en $z + \omega$.

III.

10. Au lieu des polynomes $P_1, P_2, \ldots, P_m$ du paragraphe 1, considérons maintenant m *fonctions rationnelles*

$$R_1(u, v, \ldots, w), \; R_2(u, v, \ldots, w), \; \ldots, \; R_m(u, v, \ldots, w)$$

de m lettres $u, v, \ldots, w$.

Nous allons montrer qu'on peut trouver des fonctions

$$f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)$$

uniformes dans la moitié du plan à droite de Oy, admettant la période $\omega' i$ et satisfaisant aux équations fonctionnelles

$$(6) \quad \begin{cases} f(z+\omega) = R_1[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)], \\ \varphi(z+\omega) = R_2[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi(z+\omega) = R_m[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)]. \end{cases}$$

Nous ne diminuons pas la généralité en supposant que les R s'annulent pour $u = v = \ldots = w = 0$ et que le dénominateur commun des R réduits à avoir même dénominateur prend la valeur *un* pour $u = v = \ldots = w = 0$.

Nous ramènerons bien facilement ce cas au cas précédent. Remplaçons en effet $f, \varphi, \ldots, \psi$ respectivement par

$$\frac{f}{1+\chi}, \frac{\varphi}{1+\chi}, \ldots, \frac{\psi}{1+\chi}.$$

Les seconds membres des équations fonctionnelles deviendront des fractions rationnelles en $f, \varphi, \ldots, \psi$ et χ avec même dénominateur. Nous aurons ainsi

$$\frac{f(z+\omega)}{1+\chi(z+\omega)} = \frac{P_1[f, \varphi, \ldots, \psi, \chi]}{1+P_{m+1}[f, \varphi, \ldots, \psi, \chi]},$$

$$\frac{\varphi(z+\omega)}{1+\chi(z+\omega)} = \frac{P_2[f, \varphi, \ldots, \psi, \chi]}{1+P_{m+1}[f, \varphi, \ldots, \psi, \chi]},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\psi(z+\omega)}{1+\chi(z+\omega)} = \frac{P_m[f, \varphi, \ldots, \psi, \chi]}{1+P_{m+1}[f, \varphi, \ldots, \psi, \chi]},$$

les P étant des polynomes. Les m premiers $P_1, P_2, \ldots, P_m$ s'annulent pour $f = \varphi = \ldots = \psi = 0$, quel que soit χ. Le polynome P_{m+1} s'annule pour $f = \varphi = \ldots = \psi = \chi = 0$.

Nous sommes donc amené à écrire les $m+1$ équations

$$(7)\qquad \begin{cases} f(z+\omega) = P_1[f, \varphi, \ldots, \psi, \chi], \\ \varphi(z+\omega) = P_2[f, \varphi, \ldots, \psi, \chi], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \chi(z+\omega) = P_{m+1}[f, \varphi, \ldots, \psi, \chi], \end{cases}$$

ce qui nous ramène au cas précédemment étudié. Les nombres μ qui jouent un rôle important s'obtiennent immédiatement. Les m premiers seront les racines de l'équation relative à la substitution linéaire formée avec les termes du premier degré, dans les numérateurs des R; quant au dernier μ_{m+1} il sera égal au degré des polynômes P. Les conditions d'inégalité qui doivent être vérifiées (§ 8) sont donc faciles à former.

11. Il n'est pas inutile de s'assurer que les fonctions dont nous venons d'établir l'existence ne se réduisent pas à des constantes. Nous sommes certain d'obtenir par les équations fonctionnelles (7) des fonctions $f, \varphi, \ldots, \psi, \chi$ qui ne se réduisent pas à des constantes; c'est ce que nous avons déjà dit à la fin du paragraphe 7. On peut se donner arbitrairement dans la première bande les files de pôles avec le résidu correspondant. Dans ces conditions il ne pourra pas arriver en général que les quotients

$$\frac{f}{1+\chi}, \frac{\varphi}{1+\chi}, \ldots, \frac{\psi}{1+\chi}$$

se réduisent à des constantes. Il suffit en effet d'avoir dans la première bande pour $f, \varphi, \ldots, \psi, \chi$ deux pôles distincts (c'est à dire différents d'un multiple de $\omega' i$) avec des résidus dont les rapports sont, pour l'un ou l'autre pôle, différents; on est alors assuré que les quotients précédents ne peuvent se réduire à des constantes.

12. Jusqu'à présent, nous n'avons obtenu que des fonctions uniformes dans une moitié du plan. Supposons maintenant que la transformation *rationnelle*

$$
(S) \qquad \begin{cases} u' = R_1(u, v, \ldots, w), \\ v' = R_2(u, v, \ldots, w), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ w' = R_m(u, v, \ldots, w), \end{cases}
$$

soit de plus *birationnelle,* c'est à dire que des équations précédentes on puisse tirer $u, v, \ldots, w$ en fonctions rationnelles de $u', v', \ldots, w'$.

D'après le paragraphe 10, nous pourrons trouver des fonctions périodiques de période $\omega' i$ satisfaisant aux équations (6) et uniformes dans la moitié du plan à droite de Oy. Il est facile de voir que, dans le cas où nous nous plaçons maintenant, *ces fonctions seront uniformes dans tout le plan.* On a en effet la substitution inverse donnant les relations

$$
\begin{aligned}
f(z) &= Q_1[f(z+\omega), \varphi(z+\omega), \ldots, \psi(z+\omega)], \\
\varphi(z) &= Q_2[f(z+\omega), \varphi(z+\omega), \ldots, \psi(z+\omega)], \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\psi(z) &= Q_m[f(z+\omega), \varphi(z+\omega), \ldots, \psi(z+\omega)],
\end{aligned}
$$

les Q étant des fonctions rationnelles. Les fonctions définis à droite de Oy s'étendront donc de proche en proche dans les bandes successives à gauche de Oy et cette extension sera évidemment une extension analytique.

Nous arrivons donc au théorème suivant qui est le principal résultat de ce travail:

Etant donnée une substitution birationnelle arbitraire (S), *on peut trouver une infinité de systèmes de fonctions*

$$f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)$$

uniformes dans tout le plan avec des discontinuités exclusivement polaires, ayant la période $\omega' i$, et satisfaisant aux équations fonctionnelles

$$f(z + \omega) = R_1[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)],$$
$$\varphi(z + \omega) = R_2[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi(z + \omega) = R_m[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)].$$

IV.

13. Je dois, en terminant, rappeler un mémoire de M. POINCARÉ (*Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes,* Journal de mathématiques 1890) dans lequel l'éminent géomètre s'était proposé un problème analogue à celui que nous venons de traiter.

Soient m un nombre quelconque réelle ou imaginaire ($|m| > 1$) et

$$R_1, R_2, \ldots, R_n,$$

n fonctions rationnelles de n lettres. M. POINCARÉ se propose de chercher des fonctions uniformes de u

$$\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$$

telles que l'on ait

$$\varphi_1(mu) = R_1[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)],$$
$$\varphi_2(mu) = R_2[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_n(mu) = R_n[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)],$$

en se bornant aux fonctions *qui ne présentent pas pour $u = 0$ de point singulier essentiel.*

Si nous posons

$$u = e^z$$

les fonctions $\varphi(u)$ deviendront des fonctions uniformes de z

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$$

admettant la période $2\pi i$, et en posant

$$\log m = \omega$$

(on prend une détermination fixe d'ailleurs quelconque de ce logarithme), on aura

$$f_1(z+\omega) = R_1[f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)],$$
$$f_2(z+\omega) = R_2[f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n(z+\omega) = R_n[f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)],$$

et nous obtenons ainsi des équations fonctionnelles toutes semblables à celles que nous avons étudiées dans ce mémoire.

L'hypothèse faite que $u = 0$ n'est pas un point singulier essentiel pour les fonctions φ entraîne *une certaine relation d'égalité pour les fonctions rationnelles R.* En admettant que les R s'annulent pour

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = 0$$

et que l'on ait, comme il est en général permis de le supposer, les développements dans le voisinage de *zéro*

$$R_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \mu_1\varphi_1 + \ldots,$$
$$R_2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \mu_2\varphi_2 + \ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \mu_n\varphi_n + \ldots,$$

les termes non écrits étant de degré supérieur au premier, *l'un des nombres μ doit être égal à m.* C'est à l'aide de développements ordonnés suivant les puissances entières et positives de e^z que M. POINCARÉ démontre l'existence des transcendantes dont il s'occupe, et qui pour des R donnés, ne dépendent que d'une ou plusieurs constantes arbitraires.

Les problèmes que nous avons traités sont donc en réalité différents de ceux qui ont occupé M. POINCARÉ dans le beau mémoire que nous avons cité, et je ne vois aucune autre manière d'établir l'existence des transcendantes que nous avons considéré ici que des méthodes d'approximations successives susceptibles d'ailleurs, comme on l'a vu, de toute la rigueur désirable.

Paris, le 30 décembre 1893.

EIN BEITRAG ZUR THEORIE DES LEGENDRE'SCHEN POLYNOMS

VON

DAVID HILBERT

in KÖNIGSBERG i. Pr.

Die vorliegende Mittheilung beschäftigt sich mit der Frage nach dem kleinsten von 0 verschiedenen Werthe, dessen das Integral

$$I = \int_\alpha^\beta [f(x)]^2 dx \qquad (\beta > \alpha)$$

fähig ist, wenn man für $f(x)$ eine ganze rationale Function $n - 1^{\text{ten}}$ Grades mit *ganzzahligen* Coefficienten wählt und wenn man unter α und β gegebene Constanten versteht. Wird

$$f(x) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

gesetzt, so geht das Integral in eine definite quadratische Form der n Veränderlichen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ über:

$$I = \sum^{i,k} \alpha_{ik} a_i a_k, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

deren Coefficienten durch die Formel

$$\alpha_{ik} = \int_\alpha^\beta x^{2n-i-k} dx = \frac{\beta^{2n-i-k+1} - \alpha^{2n-i-k+1}}{2n - i - k + 1}$$

gegeben sind.

Um eine obere Grenze für das Minimum dieser quadratischen Form I zu erhalten bedarf es der Berechnung ihrer Discriminante

$$D_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ersetzen wir in dieser Determinante jedes Element durch seinen Integralausdruck und verwenden dabei in allen Elementen der ersten Horizontalreihe die Integrationsveränderliche $x = x_1$, in den Elementen der 2ten, $\dots$, n^{ten} Horizontalreihe bezüglich die Integrationsveränderlichen $x = x_2$, $\dots$, $x = x_n$, so stellt sich die Discriminante der quadratischen Form *1* als ein n-faches Integral von der folgenden Gestalt dar:

$$D_{\alpha\beta} = \int_\alpha^\beta \dots \int_\alpha^\beta x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_n^0 \prod^{i,k} (x_i - x_k) dx_1 \dots dx_n.$$

Die Vertauschung der n Integrationsveränderlichen $x_1, \dots, x_n$ und die Addition der dadurch entstehenden Gleichungen liefert dann

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{\underline{|n}} \int_\alpha^\beta \dots \int_\alpha^\beta \prod^{i,k} (x_i - x_k)^2 dx_1 \dots dx_n$$

und wenn wir mittelst

$$x_i = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) y_i + \frac{1}{2}(\beta + \alpha) \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

die neuen Integrationsveränderlichen $y_1, \dots, y_n$ einführen, *so gewinnen wir die Formel*

$$D_{\alpha\beta} = \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)^{n^2} D,$$

wo zur Abkürzung $D = D_{-1,+1}$ gesetzt ist.

Beispielsweise folgt für $\alpha = 0, \beta = 1$

$$D = 2^n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & \dots \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{7} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix} = 2^{n^2} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Um nun D zu berechnen, entwickeln wir die ganze rationale Function $f(x)$ in eine nach Legendre'schen Polynomen X_m fortschreitende Reihe. Wegen

$$x^m = c_m X_m + c'_m X_{m-1} + \dots + c_m^{(m)} X_0,$$

wo

$$c_m = \frac{\underline{|m}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}$$

ist, erhalten wir

$$f(x) = a_1(c_{n-1}X_{n-1} + c'_{n-1}X_{n-2} + \dots) + a_2(c_{n-2}X_{n-2} + c'_{n-2}X_{n-3} + \dots) + \dots$$

$$= c_{n-1}a_1X_{n-1} + (c'_{n-1}a_1 + c_{n-2}a_2)X_{n-2} + (c''_{n-1}a_1 + c'_{n-2}a_2 + c_{n-3}a_3X_{n-3}) + \dots$$

und mit Hilfe der Formeln

$$\int_{-1}^{+1} X_m^2 dx = \frac{2}{2m+1}, \qquad \int_{-1}^{+1} X_m X_k dx = 0 \qquad (m \neq k)$$

folgt somit

$$[I]_{\substack{\alpha=-1\\ \beta=+1}} = \int_{-1}^{+1} f^2(x)dx = \frac{2}{2n-1}b_1^2 + \frac{2}{2n-3}b_2^2 + \frac{2}{2n-5}b_3^2 + \dots,$$

wo

$$b_1 = c_{n-1}a_1,$$

$$b_2 = c'_{n-1}a_1 + c_{n-2}a_2,$$

$$b_3 = c''_{n-1}a_1 + c'_{n-2}a_2 + c_{n-3}a_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

gesetzt ist. Auf Grund dieser Darstellung als Summe von Quadraten linearer Formen gewinnt man für die Discriminante D den Werth

$$D = \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}(c_0 c_1 \dots c_{n-1})^2$$

$$= 2^{n^2} \frac{\{1^{n-1} 2^{n-2} \dots (n-2)^2 (n-1)^1\}^4}{1^{2n-1} 2^{2n-2} \dots (2n-2)^2 (2n-1)^1}$$

und hierin ist die rechte Seite genau identisch mit $\frac{2^{n^2}}{\Delta}$, wo Δ denjenigen Werth bedeutet, welchen ich in meiner Abhandlung *Über die Discriminante*

der im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen Reihe[1] für die Discriminante des einer gewissen linearen Transformation unterworfenen Legendre'schen Polynoms n^{ten} Grades erhalten habe. Unter Berücksichtigung der oben für D aufgestellten Formel folgt hieraus das Resultat

Die Discriminante der quadratischen Form $\int\limits_0^1 f^2(x)dx$ *hat den Werth*

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix} = \frac{\{1^{n-1}\,2^{n-2}\ldots(n-2)^2(n-1)^1\}^4}{1^{2n-1}\,2^{2n-2}\ldots(2n-2)^2(2n-1)^1},$$

und stimmt genau überein mit dem reciproken Werth der Discriminante der Gleichung n^{ten} *Grades*

$$\xi^n + \binom{n}{1}^2 \xi^{n-1} + \binom{n}{2}^2 \xi^{n-2} + \ldots + 1 = 0,$$

deren linke Seite sich durch eine lineare Transformation der Veränderlichen ξ *in das Legendre'sche Polynom* X_n *überführen lässt.*

Wir kehren zu der ursprünglich gestellten Frage zurück. Die Anwendung der Stirling'schen Formel liefert, wenn N eine positive Zahl bedeutet, die Gleichung

$$Nl1 + (N-1)l2 + \ldots + 2l(N-1) + 1lN = \frac{1}{2}N^2lN - \frac{3}{4}N^2(1+\varepsilon_N),$$

wo ε_N eine mit wachsendem N verschwindende Zahl bedeutet. Mit Hilfe dieser Formel findet man leicht

$$lD = (1+\varepsilon_n')l(2^{-n^2}),$$

[1] Crelle's Journal, Bd. 103, S. 342.

wo ε'_n mit wachsendem n verschwindet, d. h.

$$D = \eta_n 2^{-n^2}$$

und folglich

$$D_{\alpha,\beta} = \eta_n \left(\frac{\beta - \alpha}{4}\right)^{n^2},$$

wo η_n mit wachsendem n sich der Einheit nähert.

Nun ist es, einem Satze von H. MINKOWSKI[1] zufolge, stets möglich, in einer definiten quadratischen Form die n Veränderlichen derart als ganze Zahlen zu bestimmen, dass der Werth der quadratischen Form kleiner ausfällt als das n-fache der n^{ten} Wurzel aus ihrer Discriminante. Wird daher die positive Differenz $\beta - \alpha$ kleiner als 4 angenommen, so folgt, dass es stets möglich ist, eine ganze rationale Function $f(x)$ mit ganzzahligen Coefficienten zu bestimmen, für welche der Werth des Integrals $I = \int_\alpha^\beta f^2(x)dx$ kleiner ausfällt, als $n\eta'_n\left(\frac{|\beta - \alpha|}{4}\right)^n$. Da aber $\eta'_n = \sqrt[n]{\eta_n}$ mit wachsendem n sich ebenfalls der Einheit nähert, so erhalten wir das Resultat

Das Integral $\int_\alpha^\beta f^2(x)dx$ kann einen beliebig kleinen positiven Werth erhalten, wenn man die ganze ganzzahlige Function $f(x)$ geeignet wählt, vorausgesetzt, dass das Integrationsintervall α bis β kleiner als 4 ist.

Königsberg i. Pr. 13. März 1893.

---

[1] Crelle's Journal. Bd. 107. S. 291.

SUR LES VIBRATIONS DES CORPS ÉLASTIQUES ISOTROPES

PAR

VITO VOLTERRA

À PISE.

Introduction.

1. Les lignes caractéristiques jouent un rôle très important dans la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. Leur étude a été développé dans l'ouvrage de M. Du Bois Reymond dont la première partie a paru en 1864 et dans un court article du même auteur qui a été publié en 1883.

Mais dès 1860 Riemann dans son mémoire sur la propagation du son avait montré l'avantage qu'on peut tirer de la considération des lignes caractéristiques dans l'intégration des équations différentielles. Les idées de Riemann ont été reprises tout récemment par M. Darboux qui a consacré un chapitre de son ouvrage sur la théorie des surfaces pour les appliquer à une équation qui offre le plus grand interêt dans la physique mathématique et la géométrie.

Il serait intéressant de généraliser la théorie des caractéristiques aux équations à trois variables indépendantes; mais il paraît avantageux de faire précéder à cette extension l'étude approfondie de quelques équations particulières. Les résultats relatifs à la généralisation des caractéristiques qu'on obtient de la sorte, et les méthodes qu'on est porté à suivre peuvent servir de guide pour une étude générale car ils offrent le moyen de s'orienter et de trouver son chemin dans un champ tout à fait nouveau.

C'est pourquoi j'ai essayé de généraliser la théorie des caractéristiques au cas d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles

à trois variables qui se présente dans la physique mathématique. C'est le système des équations différentielles des vibrations des corps élastiques isotropes lorsque les déplacements des points sont indépendants d'une coordonnée. Les mêmes équations paraissent dans la théorie des vibrations des membranes élastiques. Elles sont les suivantes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + (b^2 - a^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + X,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + (b^2 - a^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + Y,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + Z,$$

où les quantités constantes a, b représentent les vélocités de propagation des ondes transversales et longitudinales.

2. Si nous concevons que x, y, t soient les coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace nous pourrons borner nos considérations à un espace à trois dimensions. Quels sont maintenant les éléments qui jouent dans ce cas le même rôle que les lignes caractéristiques dans les équations à deux variables? Prenons pour sommet un point quelconque de l'espace et conduisons deux cônes de révolution dont l'axe soit parallèle à l'axe t et dont les ouvertures soient $2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} a$, $2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} b$. Ces cônes jouent le rôle de *cônes caractéristiques*. Je donne dans ce mémoire les formules par lesquelles on peut calculer les valeurs des fonctions inconnues au sommet des cônes lorsqu'on connaît les valeurs des mêmes fonctions et de leurs dérivées sur des surfaces quelconques limitées par une nappe ou par les deux nappes de ces cônes.

3. En particularisant les formules on peut en obtenir d'autres qui ont une application directe en physique mathématique.

Il est connu que la conception du principe de Huyghens a présenté beaucoup de difficultés jusqu'à ce que Kirchhoff donna sa formule qui présente ce principe sous une forme rigoureuse et générale. Pour les ondes cylindriques on ne connaissait pas la formule correspondante, car on ne pouvait pas la trouver en employant une méthode tout à fait semblable à celle suivie par Kirchhoff. En effet j'ai montré dans l'Art.

11ème que dans le cas des ondes cylindriques les intégrales qui ont la forme de ceux dont KIRCHHOFF a fait usage, sont polydromes, c'est à dire présentent la même particularité que j'ai observée pour les intégrales de LAMÉ relatives aux équations de la double réfraction.[1] Pour employer la méthode GREEN-KIRCHHOFF il faudrait alors modifier l'espace par des coupures, et l'on trouverait des résultats fort différents de ceux qu'on voudrait obtenir.

Au contraire, en particularisant les formules générales dont j'ai parlé dans le paragraphe précédent, on peut trouver sous trois formes différentes l'expression mathématique du principe de HUYGHENS pour les ondes cylindriques. Lorsque les vibrations sont harmoniques l'une d'elle se réduit à celle qui a été trouvée par M. WEBER dans son mémoire sur l'équation $\Delta u + k^2 u = 0$,[2] de la même façon que la formule de KIRCHHOFF se réduit à une autre formule que M. HELMHOLTZ avait donné antérieurement.

Enfin on peut trouver que les surfaces caractéristiques jouent un rôle dans une question du calcul des variations et l'on peut trouver par là une application de ces surfaces à la théorie du choc dans un milieu élastique.

ART. 1. *Les formules fondamentales.*

1. Les équations que nous allons étudier sont les suivantes

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + Z,$$

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + (b^2 - a^2)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + X, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + (b^2 - a^2)\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + Y \end{cases}$$

où a, b sont des constantes et l'on a

$$b > a.$$

---

[1] Acta mathematica, T. 16.

[2] Math. Annalen, Bd. 1.

Soient a', b', a'', b'' des nouvelles constantes telles que

(1) $$b^2 - a^2 = b'^2 - a'^2 = b''^2 - a''^2,$$

on aura

(2) $$\begin{cases} a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = k', \\ a^2 - a''^2 = b^2 - b''^2 = k', \end{cases}$$

et les équations (B) pourront s'écrire

(B') $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (b'^2 - a'^2) \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = X, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - b^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (b''^2 - a''^2) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = Y. \end{cases}$$

2. Commençons par trouver la *formule fondamentale* relative à l'équation (A). Regardons x, y, t comme les coordonnées cartésiennes des points de l'espace et supposons que dans un champ S à trois dimensions l'intégrale w de l'équation (A) soit régulière.

Si nous désignons par Σ le contour du champ S, on aura, en intégrant par parties,

(3) $$\int_S w_\lambda Z dS = \int_S w_\lambda \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) dS$$

$$= - \int_\Sigma w_\lambda \left(\frac{\partial w}{\partial t} \cos nt - a^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial w}{\partial y} \cos ny \right) \right) d\Sigma$$

$$- \int_S \left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w_\lambda}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) dS$$

où w_λ dénote une nouvelle fonction regulière dans le champ S, et n est la normale à la surface Σ dirigée vers l'intérieur du champ S.

De même on aura

$$-\int_S \left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w_\lambda}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right)dS$$

$$= \int_\Sigma w\left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial t}\cos nt - a^2\left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial w_\lambda}{\partial y}\cos ny\right)\right)d\Sigma$$

$$+ \int_S w\left(\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial y^2}\right)\right)dS.$$

Par suite en posant

$$\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial y^2}\right) + Z_\lambda, \tag{4}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}\cos nt - a^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial w}{\partial y}\cos ny\right) = W, \tag{5}$$

$$\frac{\partial w_\lambda}{\partial t}\cos nt - a^2\left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial w_\lambda}{\partial y}\cos ny\right) = W_\lambda, \tag{6}$$

l'équation (3) pourra s'écrire

$$\int_S (w_\lambda Z - w Z_\lambda)dS = \int_\Sigma (w W_\lambda - w_\lambda W)d\Sigma. \tag{C}$$

La formule qu'on vient de trouver est la formule fondamentale qu'on cherchait.

3. Nous allons maintenant procéder d'une façon analogue pour trouver une formule semblable pour le système des équations (B).

u, v, u_λ, v_λ étant quatre fonctions régulières dans le champ S, et les deux premières étant des intégrales des équations (B), on aura

$$\int_S (u_\lambda X + v_\lambda Y)\, dS = \int_S \left\{ u_\lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (b'^2 - a'^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right.$$

$$\left. + v_\lambda \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (b''^2 - a''^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right\} dS$$

$$= - \int_\Sigma \left\{ u_\lambda \left[\frac{\partial u}{\partial t} \cos nt - \left(b^2 \frac{\partial u}{\partial x} + b'^2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos nx - \left(a^2 \frac{\partial u}{\partial y} - a'^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos ny \right] \right.$$

$$\left. + v_\lambda \left[\frac{\partial v}{\partial t} \cos nt - \left(a^2 \frac{\partial v}{\partial x} - a''^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos nx - \left(b^2 \frac{\partial v}{\partial y} + b''^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos ny \right] \right\} d\Sigma$$

$$- \int_S \left\{ \frac{\partial u_\lambda}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} - \left(b^2 \frac{\partial u}{\partial x} + b'^2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial u_\lambda}{\partial x} - \left(a^2 \frac{\partial u}{\partial y} - a'^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial u_\lambda}{\partial y} + \frac{\partial v_\lambda}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \right.$$

$$\left. - \left(a^2 \frac{\partial v}{\partial x} - a''^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial v_\lambda}{\partial x} - \left(b^2 \frac{\partial v}{\partial y} + b''^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial v_\lambda}{\partial y} \right\} dS.$$

Mais la dernière intégrale qui paraît dans la formule précédente peut se transformer dans l'expression suivante

$$\int_\Sigma \left\{ u \left[\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} \cos nt - \left(b^2 \frac{\partial u_\lambda}{\partial x} + b''^2 \frac{\partial v_\lambda}{\partial y} \right) \cos nx - \left(a^2 \frac{\partial u_\lambda}{\partial y} - a''^2 \frac{\partial v_\lambda}{\partial x} \right) \cos ny \right] \right.$$

$$\left. + v \left[\frac{\partial v_\lambda}{\partial t} \cos nt - \left(a^2 \frac{\partial v_\lambda}{\partial x} - a'^2 \frac{\partial u_\lambda}{\partial y} \right) \cos nx - \left(b^2 \frac{\partial v_\lambda}{\partial y} + b'^2 \frac{\partial u_\lambda}{\partial x} \right) \cos ny \right] \right\} d\Sigma$$

$$+ \int_S \left\{ u \left(\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial y^2} - (b''^2 - a''^2) \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial x \partial y} \right) \right.$$

$$\left. + v \left(\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial y^2} - (b'^2 - a'^2) \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x \partial y} \right) \right\} dS.$$

Par suite en posant

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial y^2} - (b''^2 - a''^2) \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial x \partial y} = X_\lambda, \\ & \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial y^2} - (b'^2 - a'^2) \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x \partial y} = Y_\lambda, \end{aligned} \right.$$

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}\cos nt - \left(b^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + b'^2\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\cos nx - \left(a^2\dfrac{\partial u}{\partial y} - a'^2\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\cos ny = U', \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}\cos nt - \left(a^2\dfrac{\partial v}{\partial x} - a''^2\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\cos nx - \left(b^2\dfrac{\partial v}{\partial y} + b''^2\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\cos ny = V'', \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial t}\cos nt - \left(b^2\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial x} + b''^2\dfrac{\partial v_\lambda}{\partial y}\right)\cos nx - \left(a^2\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial y} - a''^2\dfrac{\partial v_\lambda}{\partial x}\right)\cos ny = U''_\lambda, \\ \dfrac{\partial v_\lambda}{\partial t}\cos nt - \left(a^2\dfrac{\partial v_\lambda}{\partial x} - a'^2\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial y}\right)\cos nx - \left(b^2\dfrac{\partial v_\lambda}{\partial y} + b'^2\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial x}\right)\cos ny = V'_\lambda, \end{cases}$$

on aura

$$(\mathrm{D})\qquad \int_S \{u_\lambda X + v_\lambda Y - u X_\lambda - v Y_\lambda\} dS = \int_\Sigma \{u U''_\lambda + v V'_\lambda - u_\lambda U' - v_\lambda V''\} d\Sigma$$

qui est la deuxième *formule fondamentale* qu'on cherchait.

Art. 2. *Les intégrales fondamentales.*

1. Soit $\varphi(\tau, \xi, \eta)$ une intégrale de l'équation

$$(1)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2},$$

il est evident que

$$(2)\qquad w = \varphi(\pm\, a(t_1 - t),\, x - x_1,\, y - y_1),$$

t_1, x_1, y_1 étant des constantes arbitraires, sera une intégrale de l'équation (A) en supposant $Z = 0$. De même on vérifiera aisément que les deux systèmes de fonctions

$$(3)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial\varphi(a(t_1 - t),\, x - x_1,\, y - y_1)}{\partial y}, \\ v = -\dfrac{\partial\varphi(a(t_1 - t),\, x - x_1,\, y - y_1)}{\partial x}, \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial\varphi(b(t_1 - t),\, x - x_1,\, y - y_1)}{\partial x}, \\ v = \dfrac{\partial\varphi(b(t_1 - t),\, x - x_1,\, y - y_1)}{\partial y}, \end{cases}$$

satisferont aux équations (B) si l'on suppose $X = Y = 0$.

On pourra donc trouver des intégrales particulières des équations (A), (B), X, Y, Z étant nuls, en intégrant l'équation (1).

2. Soit

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

on aura tout de suite deux intégrales de l'équation (1)

$$\varphi_0 = \log \rho, \tag{5}$$

$$\Phi_0 = \tau \log \rho. \tag{6}$$

Mais considérons les intégrales de l'équation (1) qui ont la forme

$$\varphi = \tau^n \psi(\theta)$$

où

$$\theta = \frac{\tau}{\rho}.$$

L'équation (1) alors se transforme dans la suivante

$$\theta^2(1 - \theta^2)\psi'' + \theta(2n - \theta^2)\psi' + n(n-1)\psi = 0.$$

Examinons les deux cas qui se présentent lorsque $n = 0$, $n = 1$.

Dans le premier cas on trouvera l'intégrale

$$\psi_1 = \log(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1})$$

qui sera réel si $\theta > 1$, ou l'autre

$$\psi_2 = \arcsin \theta + \text{const.}$$

qui sera réel si $|\theta| < 1$.

Dans l'autre cas on aura l'intégrale

$$\Psi_1 = \frac{\sqrt{\theta^2 - 1}}{\theta} + \log(\theta - \sqrt{\theta^2 - 1})$$

si $\theta > 1$, ou

$$\Psi_2 = \frac{\sqrt{1 - \theta^2}}{\theta} + \arcsin \theta$$

si $|\theta| < 1$.

Dans tous les cas on prendra les radicaux avec leur valeur absolue.
On tire de là les intégrales suivantes de l'équation (1)

$$\begin{cases} \varphi_1 = \log(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1}), \\ \Phi_1 = \tau\left[\frac{\sqrt{\theta^2 - 1}}{\theta} + \log(\theta - \sqrt{\theta^2 - 1})\right], \end{cases}$$

qui seront réels si $\theta > 1$, et

$$\begin{cases} \varphi_2 = \arcsin\theta, \\ \Phi_2 = \tau\left(\frac{\sqrt{1 - \theta^2}}{\theta} + \arcsin\theta\right), \end{cases}$$

qui seront réels si $|\theta| < 1$.

3. Nous allons maintenant chercher les intégrales de l'équation (1) qui ont la forme

$$\varphi = \tau^n(f(\theta) + \log\rho\,\chi(\theta))$$

dans le cas $\theta < 1$. L'équation (1) se transforme aisément dans l'autre

$$(\theta^2(1 - \theta^2)f'' + \theta(2n - \theta^2)f' + n(n-1)f + 2\theta^3\chi')$$
$$+ \log\rho(\theta^2(1 - \theta^2)\chi'' + \theta(2n - \theta^2)\chi' + n(n-1)\chi) = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(7)\qquad \begin{cases} \theta^2(1 - \theta^2)\chi'' + \theta(2n - \theta^2)\chi' + n(n-1)\chi = 0, \\ \theta^2(1 - \theta^2)f'' + \theta(2n - \theta^2)f' + n(n-1)f + 2\theta^3\chi' = 0. \end{cases}$$

Supposons maintenant $n = 0$. En s'appuyant sur les résultats précédents on pourra prendre pour intégrale de la première équation

$$\chi_0 = \arcsin\theta$$

et par suite en intégrant l'autre on trouvera pour f,

$$f_0 = \int^{\theta}\log(1 - \theta^2)\frac{d\theta}{\sqrt{1 - \theta^2}}.$$

En ajoutant à $f_0 + \log\rho . \chi_0$ l'intégrale φ_0 après l'avoir multipliée par une constante, on trouvera

$$\varphi_3 = c + \int_0^\theta \log(1 - \theta^2) \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} + \log\rho . (\arcsin\theta + c')$$

qui sera une nouvelle intégrale de l'équation (1). Les quantités c, c' qui paraissent dans la formule précédente sont deux constantes arbitraires.

Faisons maintenant $n = 1$ dans les équations (7). Pour intégrale de la première équation on pourra prendre

$$\chi_1 = \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta} + \arcsin\theta$$

et en intégrant la seconde on aura

$$f_1 = -\int \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta^2} \log(1 - \theta^2) d\theta.$$

En formant l'expression

$$\tau(f_1 + \log\rho . \chi_1) + c'\Phi_0,$$

nous aurons

$$\Phi_3 = \tau\left[c - \int_0^\theta \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta^2} \log(1-\theta^2) d\theta + \log\rho\left(\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta} + \arcsin\theta + c'\right)\right]$$

qui sera la dernière des intégrales de l'équation (1) dont nous nous servirons.

4. Employons maintenant la formule (2); en l'appliquant aux trois intégrales φ_1, φ_2, φ_3 on trouvera

$$(8) \qquad w_1 = \log\left(\pm \frac{a(t_1 - t)}{r} + \sqrt{\frac{a^2(t_1 - t)^2}{r^2} - 1}\right),$$

$$(8') \qquad w_2 = \arcsin\frac{a(t - t_1)}{r} + c,$$

$$(8'') \qquad w_3 = c + \int_0^{\theta_a} \log(1 - \theta^2)\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} + \log r\left(\arcsin\frac{a(t - t_1)}{r} + c'\right),$$

où l'on a posé pour simplifier

$$\theta_a = \frac{a(t - t_1)}{r}, \qquad r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}.$$

Dans la première intégrale nous prendrons le signe supérieur lorsque $t_1 > t$, et nous prendrons le signe inférieur si $t_1 < t$.

5. Appliquons enfin les formules (3), (4) aux intégrales Φ_1, Φ_2, Φ_3; on aura:

en partant de Φ_1:

(9)
$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{R_a}{r^2}(y - y_1) = \dfrac{R_a}{r}\sin\omega, \\ v_1 = -\dfrac{R_a}{r^2}(x - x_1) = -\dfrac{R_a}{r}\cos\omega, \end{cases}$$

(10)
$$\begin{cases} u_2 = \dfrac{R_b}{r^2}(x - x_1) = \dfrac{R_b}{r}\cos\omega, \\ v_2 = \dfrac{R_b}{r^2}(y - y_1) = \dfrac{R_b}{r}\sin\omega, \end{cases}$$

en partant de Φ_2:

(11)
$$\begin{cases} u_3 = \dfrac{P_a}{r^2}(y - y_1) = \dfrac{P_a}{r}\sin\omega, \\ v_3 = -\dfrac{P_a}{r^2}(x - x_1) = -\dfrac{P_a}{r}\cos\omega, \end{cases}$$

(12)
$$\begin{cases} u_4 = \dfrac{P_b}{r^2}(x - x_1) = \dfrac{P_b}{r}\cos\omega, \\ v_4 = \dfrac{P_b}{r^2}(y - y_1) = \dfrac{P_b}{r}\sin\omega, \end{cases}$$

en partant de Φ_3:

(13)
$$\begin{cases} u_5 = \dfrac{Q_a}{r^2}(y - y_1) = \dfrac{Q_a}{r}\sin\omega, \\ v_5 = -\dfrac{Q_a}{r^2}(x - x_1) = -\dfrac{Q_a}{r}\cos\omega, \end{cases}$$

$$(14)\qquad \begin{cases} u_6 = \frac{Q_b}{r^2}(x - x_1) = \frac{Q_b}{r}\cos\omega, \\ v_6 = \frac{Q_b}{r^2}(y - y_1) = \frac{Q_b}{r}\sin\omega, \end{cases}$$

où l'on a posé pour simplifier

$$(15)\qquad \begin{cases} Q_a = P_a \log\left(\frac{r^2 - a^2(t - t_1)^2}{er}\right) + a(t - t_1)\left(\operatorname{arc\,sin}\frac{a(t - t_1)}{r} + c\right), \\ R_a = \sqrt{a^2(t_1 - t)^2 - r^2}, \qquad P_a = \sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}, \\ Q_b = P_b \log\left(\frac{r^2 - b^2(t - t_1)^2}{er}\right) + b(t - t_1)\left(\operatorname{arc\,sin}\frac{b(t - t_1)}{r} + c\right), \\ R_b = \sqrt{b^2(t_1 - t)^2 - r^2}, \qquad P_b = \sqrt{r^2 - b^2(t_1 - t)^2}, \end{cases}$$

$$\cos\omega = \frac{x - x_1}{r}, \qquad \sin\omega = \frac{y - y_1}{r}.$$

ART. 3. *Calcul des quantités conjuguées aux intégrales fondamentales.*

1. Nous appellerons *quantités conjuguées* à w_λ, u_λ, v_λ les fonctions W_λ, U_λ', V_λ' que nous avons introduites dans le premier article. Il faut maintenant les calculer pour les intégrales fondamentales que nous avons trouvées dans l'article précédent.

Ce calcul ne présente pas de difficultés. Nous en donnerons ici les résultats

$$(1)\qquad W_1 = \mp\frac{a}{R_a}\left(\cos nt - a^2\frac{t_1 - t}{r}\cos nr\right),$$

$$(2)\qquad W_2 = \frac{a}{P_a}\left(\cos nt + a^2\frac{t - t_1}{r}\cos nr\right),$$

$$(3)\qquad W_3 = \frac{a}{P_a}\log\left(\frac{r^2 - a^2(t - t_1)^2}{r}\right)\left(\cos nt + a^2\frac{t - t_1}{r}\cos nr\right) - a^2\frac{\cos nr}{r}\left(\operatorname{arc\,sin}\frac{a(t - t_1)}{r} + c'\right)$$

où l'on a posé

$$\cos nr = \cos nx \cos \omega + \cos ny \sin \omega.$$

2. Les expressions de U_λ'', V_λ' sont les suivantes

$$(4)\begin{cases} U_1'' = \dfrac{1}{R_a}\left\{-a^2\dfrac{t_1-t}{r}\cos nt \sin\omega + \dfrac{1}{2}(a^2+a''^2)\cos ny + \dfrac{1}{2}k''\beta\right\} + R_a\dfrac{k''}{r^2}\beta, \\ V_1' = \dfrac{1}{R_a}\left\{a^2\dfrac{t_1-t}{r}\cos nt \cos\omega - \dfrac{1}{2}(a^2+a'^2)\cos nx - \dfrac{1}{2}k'\alpha\right\} - R_a\dfrac{k'}{r^2}\alpha, \end{cases}$$

$$(5)\begin{cases} U_2'' = \dfrac{1}{R_b}\left\{-b^2\dfrac{t_1-t}{r}\cos nt \cos\omega + \dfrac{1}{2}(b^2+b''^2)\cos nx + \dfrac{1}{2}k''\alpha\right\} + R_b\dfrac{k''}{r^2}\alpha, \\ V_2' = \dfrac{1}{R_b}\left\{-b^2\dfrac{t_1-t}{r}\cos nt \sin\omega + \dfrac{1}{2}(b^2+b'^2)\cos ny + \dfrac{1}{2}k'\beta\right\} + R_b\dfrac{k'}{r^2}\beta, \end{cases}$$

$$(6)\begin{cases} U_3'' = -\dfrac{1}{P_a}\left\{a^2\dfrac{t-t_1}{r}\cos nt \sin\omega + \dfrac{1}{2}(a^2+a''^2)\cos ny + \dfrac{1}{2}k''\beta\right\} + P_a\dfrac{k''}{r^2}\beta, \\ V_3' = -\dfrac{1}{P_a}\left\{-a^2\dfrac{t-t_1}{r}\cos nt \cos\omega - \dfrac{1}{2}(a^2+a'^2)\cos nx - \dfrac{1}{2}k'\alpha\right\} - P_a\dfrac{k'}{r^2}\alpha, \end{cases}$$

$$(7)\begin{cases} U_4'' = -\dfrac{1}{P_b}\left\{b^2\dfrac{t-t_1}{r}\cos nt \cos\omega + \dfrac{1}{2}(b^2+b''^2)\cos nx + \dfrac{1}{2}k''\alpha\right\} + P_b\dfrac{k''}{r^2}\alpha, \\ V_4' = -\dfrac{1}{P_b}\left\{b^2\dfrac{t-t_1}{r}\cos nt \sin\omega + \dfrac{1}{2}(b^2+b'^2)\cos ny + \dfrac{1}{2}k'\beta\right\} + P_b\dfrac{k'}{r^2}\beta, \end{cases}$$

où nous avons posé

$$(8)\qquad \begin{cases} \alpha = \cos nx \cos 2\omega + \cos ny \sin 2\omega, \\ \beta = \cos nx \sin 2\omega - \cos ny \cos 2\omega. \end{cases}$$

3. Pour obtenir U_5'', V_5', U_6'', V_6', posons

$$(9)\qquad M_a = \log\frac{r^2 - a^2(t-t_1)^2}{r}, \qquad M_b = \log\frac{r^2 - b^2(t-t_1)^2}{r},$$

$$(9')\qquad N_a = \arc\sin\frac{a(t-t_1)}{r} + c, \qquad N_b = \arc\sin\frac{b(t-t_1)}{r} + c;$$

on aura (voir form. (15) art. 2)

$$(10)\qquad \begin{cases} Q_a = P_a(M_a - 1) + a(t - t_1)N_a, \\ Q_b = P_b(M_b - 1) + b(t - t_1)N_b, \end{cases}$$

et par suite

$$(11)\qquad \begin{cases} U_5'' = \dfrac{M_a}{P_a}\left\{- a^2\dfrac{t-t_1}{r}\sin\omega\cos nt - \dfrac{1}{2}(a^2 + a''^2)\cos ny - \dfrac{1}{2}k''\beta\right\} \\ \qquad\qquad + \dfrac{a}{r}N_a\sin\omega\cos nt + Q_a\dfrac{k'}{r^2}\beta, \\ V_5' = \dfrac{M_a}{P_a}\left\{a^2\dfrac{t-t_1}{r}\cos\omega\cos nt + \dfrac{1}{2}(a^2 + a'^2)\cos nx + \dfrac{1}{2}k'\alpha\right\} \\ \qquad\qquad - \dfrac{a}{r}N_a\cos\omega\cos nt - Q_a\dfrac{k'}{r^2}\alpha, \end{cases}$$

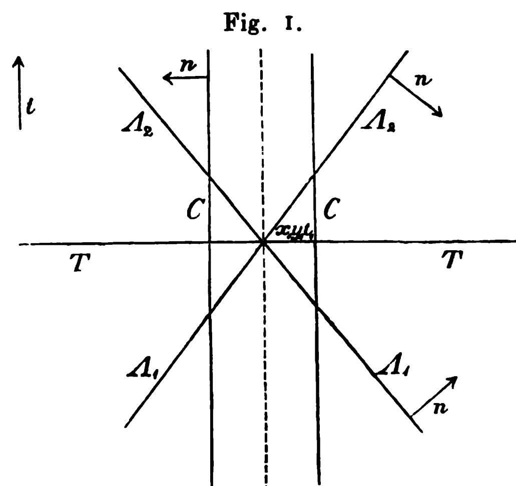
$$(12)\qquad \begin{cases} U_6'' = \dfrac{M_b}{P_b}\left\{- b^2\dfrac{t-t_1}{r}\cos\omega\cos nt - \dfrac{1}{2}(b^2 + b''^2)\cos nx - \dfrac{1}{2}k''\alpha\right\} \\ \qquad\qquad + \dfrac{b}{r}N_b\cos\omega\cos nt + Q_b\dfrac{k'}{r^2}\alpha, \\ V_6' = \dfrac{M_b}{P_b}\left\{- b^2\dfrac{t-t_1}{r}\sin\omega\cos nt - \dfrac{1}{2}(b^2 + b'^2)\cos ny - \dfrac{1}{2}k'\beta\right\} \\ \qquad\qquad + \dfrac{b}{r}N_b\sin\omega\cos nt + Q_b\dfrac{k'}{r^2}\beta. \end{cases}$$

ART. 4. *Valeurs des intégrales fondamentales et des quantités conjuguées sur des surfaces spéciales.*

1. Conduisons (voir fig. 1) par un point quelconque x_1, y_1, t_1 un cône de révolution Λ ayant l'axe parallèle à l'axe t et dont l'ouverture soit 2λ; conduisons ensuite un cylindre de revolution C ayant le même axe que le cône et dont le rayon soit ε; et enfin un plan T passant par

(x_1, y_1, t_1) et perpendiculaire à l'axe t. Nous allons calculer les valeurs des intégrales fondamentales et de leurs conjuguées sur ces surfaces.

Fig. 1.



2. Désignons par A_1 la nappe du cône dont les points ont une coordonnée $t < t_1$, et par A_2 l'autre; prenons la normale n à cette surface dirigée extérieurement au cône. On aura alors

$$(1)\qquad \begin{cases} \cos nt = \pm \sin\lambda, \\ \cos nx = \cos\lambda\cos\omega, \\ \cos ny = \cos\lambda\sin\omega, \\ \cos nr = \cos\lambda, \\ \dfrac{t_1 - t}{r} = \pm \operatorname{cotg}\lambda, \end{cases}$$

où le signe supérieur est relatif à la nappe A_1 et l'inférieur à la nappe A_2. On tire de là immédiatement les valeurs cherchées sur le cône A. Elles sont les suivantes:

$$(2)\quad w_{1,A} = \log\left(\frac{a}{\operatorname{tg}\lambda} + \sqrt{\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda} - 1}\right), \qquad (2')\quad W_{1,A} = \frac{a\cos\lambda}{r}\sqrt{a^2 - \operatorname{tg}^2\lambda},$$

$$(3)\quad w_{2,A} = \mp \arc\sin\frac{a}{\operatorname{tg}\lambda} + c, \qquad (3')\quad W_{2,A} = \pm\frac{a\cos\lambda}{r}\sqrt{\operatorname{tg}^2\lambda - a^2},$$

$$(4)\qquad w_{3,\lambda} = c + \int_0^{\pm\frac{a}{\operatorname{tg}\lambda}} \log(1-\theta^2)\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} + \log r \, . \left(\mp \arcsin\frac{a}{\operatorname{tg}\lambda} + c'\right),$$

$$(4')\qquad W_{3,\lambda} = \pm\frac{a\sin\lambda}{r}\sqrt{1-\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\log\left(r\left(1-\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}\right)\right) - a^2\frac{\cos\lambda}{r}\left(\mp\arcsin\frac{a}{\operatorname{tg}\lambda}+c'\right),$$

$$(5)\qquad \begin{cases} u_{1,\lambda} = \sqrt{\dfrac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\sin\omega, \\ v_{1,\lambda} = -\sqrt{\dfrac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\cos\omega, \end{cases}$$

$$(5')\qquad \begin{cases} U''_{1,\lambda} = \sqrt{\dfrac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\,\dfrac{k'}{r}\cos\lambda\sin\omega, \\ V'_{1,\lambda} = -\sqrt{\dfrac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\,\dfrac{k'}{r}\cos\lambda\cos\omega; \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} u_{2,\lambda} = \sqrt{\dfrac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\cos\omega, \\ v_{2,\lambda} = \sqrt{\dfrac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\sin\omega, \end{cases}$$

$$(6')\qquad \begin{cases} U''_{2,\lambda} = \sqrt{\dfrac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\,\dfrac{k'}{r}\cos\lambda\cos\omega, \\ V'_{2,\lambda} = \sqrt{\dfrac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\,\dfrac{k'}{r}\cos\lambda\sin\omega, \end{cases}$$

$$(7)\qquad \begin{cases} u_{3,\lambda} = \sqrt{1-\dfrac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\sin\omega, \\ v_{3,\lambda} = -\sqrt{1-\dfrac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\cos\omega, \end{cases}$$

$$(7')\qquad \begin{cases} U''_{3,\lambda} = \sqrt{1-\dfrac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\,\dfrac{k'}{r}\cos\lambda\sin\omega, \\ V'_{3,\lambda} = -\sqrt{1-\dfrac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\,\dfrac{k'}{r}\cos\lambda\cos\omega, \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} u_{4,A} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\cos\omega, \\ v_{4,A} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\sin\omega, \end{cases}$$

$$(8')\qquad \begin{cases} U''_{4,A} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\dfrac{k'}{r}\cos\lambda\cos\omega, \\ V'_{4,A} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\dfrac{k'}{r}\cos\lambda\sin\omega, \end{cases}$$

$$(9)\qquad \begin{cases} u_{5,A} = \dfrac{Q_{a,A}}{r}\sin\omega, \\ v_{5,A} = -\dfrac{Q_{a,A}}{r}\cos\omega, \end{cases}$$

$$(9')\qquad \begin{cases} U''_{5,A} = \left[\pm\dfrac{a}{r}N_{a,A}\sin\lambda + \dfrac{k'}{r^2}Q_{a,A}\cos\lambda\right]\sin\omega, \\ V'_{5,A} = -\left[\pm\dfrac{a}{r}N_{a,A}\sin\lambda + \dfrac{k'}{r^2}Q_{a,A}\cos\lambda\right]\cos\omega, \end{cases}$$

$$(10)\qquad \begin{cases} u_{6,A} = \dfrac{Q_{b,A}}{r}\cos\omega, \\ v_{6,A} = \dfrac{Q_{b,A}}{r}\sin\omega, \end{cases}$$

$$(10')\qquad \begin{cases} U'_{6,A} = \left[\pm\dfrac{b}{r}N_{b,A}\sin\lambda + \dfrac{k'}{r^2}Q_{b,A}\cos\lambda\right]\cos\omega, \\ V'_{6,A} = \left[\pm\dfrac{b}{r}N_{b,A}\sin\lambda + \dfrac{k'}{r^2}Q_{b,A}\cos\lambda\right]\sin\omega, \end{cases}$$

où l'on a

$$(11)\qquad \begin{cases} Q_{a,A} = r\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\log\left(\dfrac{r}{e}\left(1 - \dfrac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}\right)\right) + r\dfrac{a}{\operatorname{tg}\lambda}\left(\operatorname{arc\,sin}\dfrac{a}{\operatorname{tg}\lambda} \mp c\right), \\ Q_{b,A} = r\sqrt{1 - \dfrac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\log\left(\dfrac{r}{e}\left(1 - \dfrac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}\right)\right) + r\dfrac{b}{\operatorname{tg}\lambda}\left(\operatorname{arc\,sin}\dfrac{b}{\operatorname{tg}\lambda} \mp c\right), \end{cases}$$

$$(12)\qquad \begin{cases} N_{a,A} = \mp \arc\sin \dfrac{a}{\operatorname{tg}\lambda} + c, \\ N_{b,A} = \mp \arc\sin \dfrac{b}{\operatorname{tg}\lambda} + c. \end{cases}$$

Il est évident que les valeurs de $w_{1,A}$, $W_{1,A}$, $u_{1,A}$, $v_{1,A}$, $U''_{1,A}$, $V'_{1,A}$ seront réelles si $\operatorname{tg}\lambda < a$, tandis que les valeurs de $w_{2,A}$, $W_{2,A}$, $w_{3,A}$, $W_{3,A}$, $u_{3,A}$, $v_{3,A}$, $U''_{3,A}$, $V'_{3,A}$, $u_{5,A}$, $v_{5,A}$, $U''_{5,A}$, $V'_{5,A}$ seront réelles si $\operatorname{tg}\lambda > a$.

De même il faut que $\operatorname{tg}\lambda < b$, afin que $u_{2,A}$, $v_{2,A}$, $U''_{2,A}$, $V'_{2,A}$ soient réelles, et il faut au contraire qu'on ait $\operatorname{tg}\lambda > b$, afin que $u_{4,A}$, $v_{4,A}$, $U''_{4,A}$, $V'_{4,A}$, $u_{6,A}$, $v_{6,A}$, $U''_{6,A}$, $V'_{6,A}$ soient réelles.

3. On tire de là que sur le plan T on aura des valeurs réelles pour $w_{2,A}$, $w_{3,A}$, $u_{5,A}$, $v_{5,A}$, $u_{6,A}$, $v_{6,A}$, et pour leurs quantités conjuguées. Pour les trouver il suffira de prendre $\lambda = \frac{\pi}{2}$. On aura alors

$$(13)\qquad w_{2,T} = c, \qquad\qquad (13')\qquad W_{2,T} = \pm\frac{a}{r},$$

$$(14)\qquad w_{3,T} = c + c'\log r, \qquad\qquad (14')\qquad W_{3,T} = \pm\frac{a}{r}\log r,$$

$$(15)\qquad \begin{cases} u_{5,T} = \dfrac{\log r - 1}{r}\sin\omega, \\ v_{5,T} = -\dfrac{\log r - 1}{r}\cos\omega, \end{cases} \qquad (15')\qquad \begin{cases} U''_{5,T} = \pm\dfrac{ac}{r}\sin\omega, \\ V'_{5,T} = \mp\dfrac{ac}{r}\cos\omega, \end{cases}$$

$$(16)\qquad \begin{cases} u_{6,T} = \dfrac{\log r - 1}{r}\cos\omega, \\ v_{6,T} = \dfrac{\log r - 1}{r}\sin\omega, \end{cases} \qquad (16')\qquad \begin{cases} U''_{6,T} = \pm\dfrac{bc}{r}\cos\omega, \\ V'_{6,T} = \pm\dfrac{bc}{r}\sin\omega. \end{cases}$$

Il est évident par la manière dont ces valeurs ont été trouvées qu'on devra prendre le signe supérieur si la normale au plan T a la même direction que l'axe t, et qu'on devra prendre le signe inférieur lorsque la normale au plan T aura la direction contraire.

4. Il nous faut maintenant déterminer les valeurs des intégrales

fondamentales et de leurs conjuguées sur le cylindre C. Prenons la normale dirigée extérieurement au cylindre, on aura alors

$$\begin{cases} \cos nt = 0, \\ \cos nx = \cos\omega, \\ \cos ny = \sin\omega, \\ \cos nr = 1, \\ \quad r = \varepsilon, \end{cases}$$

et par suite les valeurs cherchées sur le cylindre seront:

$$(17)\quad \begin{cases} w_{1,c} = \log\left(\pm\frac{a(t_1-t)}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{a^2(t_1-t)^2}{\varepsilon^2} - 1}\right), \\ w_{2,c} = \arcsin\frac{a(t-t_1)}{\varepsilon} + c, \\ w_{3,c} = c + \int\limits_0^{\frac{a(t-t_1)}{\varepsilon}} \log(1-\theta^2)\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} + \log\varepsilon\left(\arcsin\frac{a(t-t_1)}{\varepsilon} + c'\right), \end{cases}$$

$$(17')\quad \begin{cases} W_{1,c} = \pm\frac{a^2}{\sqrt{(t_1-t)^2 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}}}\cdot\frac{t_1-t}{\varepsilon}, \\ W_{2,c} = \frac{a^2}{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2(t-t_1)^2}}\cdot\frac{t-t_1}{\varepsilon}, \\ W_{3,c} = \frac{a^2\log\left(\frac{\varepsilon^2 - a^2(t-t_1)^2}{\varepsilon}\right)}{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2(t-t_1)^2}}\cdot\frac{t-t_1}{\varepsilon} - \frac{a^2}{\varepsilon}\left(\arcsin\frac{a(t-t_1)}{\varepsilon} + c'\right); \end{cases}$$

$$(18)\quad \begin{cases} u_{1,c} = \frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}\sin\omega, \\ v_{1,c} = -\frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}\cos\omega, \end{cases}$$

$$(18')\quad \begin{cases} U''_{1,c} = \frac{a^2\sin\omega}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2 - \varepsilon^2}} + k''\frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon^2}\sin\omega, \\ V'_{1,c} = \frac{-a^2\cos\omega}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2 - \varepsilon^2}} - k'\frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon^2}\cos\omega, \end{cases}$$

(19)
$$\begin{cases} u_{2,c} = \dfrac{\sqrt{b^2(t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \cos\omega, \\[2ex] v_{2,c} = \dfrac{\sqrt{b^2(t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \sin\omega, \end{cases}$$

(19')
$$\begin{cases} U''_{2,c} = \dfrac{b^2 \cos\omega}{\sqrt{b^2(t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}} + k'' \dfrac{\sqrt{b^2(t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon^2} \cos\omega, \\[2ex] V'_{2,c} = \dfrac{b^2 \sin\omega}{\sqrt{b^2(t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}} + k' \dfrac{\sqrt{b^2(t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon^2} \sin\omega, \end{cases}$$

(20)
$$\begin{cases} u_{3,c} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2(t_1 - t)^2}}{\varepsilon} \sin\omega, \\[2ex] v_{3,c} = -\dfrac{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2(t_1 - t)^2}}{\varepsilon} \cos\omega, \end{cases}$$

(20')
$$\begin{cases} U''_{3,c} = -\dfrac{a^2 \sin\omega}{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2(t - t_1)^2}} + k'' \dfrac{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2(t - t_2)^2}}{\varepsilon^2} \sin\omega, \\[2ex] V'_{3,c} = \dfrac{a^2 \cos\omega}{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2(t - t_1)^2}} - k' \dfrac{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2(t - t_1)^2}}{\varepsilon^2} \cos\omega, \end{cases}$$

(21)
$$\begin{cases} u_{4,c} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon^2 - b^2(t_1 - t)^2}}{\varepsilon} \cos\omega, \\[2ex] v_{4,c} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon^2 - b^2(t_1 - t)^2}}{\varepsilon} \sin\omega, \end{cases}$$

(21')
$$\begin{cases} U''_{4,c} = -\dfrac{b^2 \cos\omega}{\sqrt{\varepsilon^2 - b^2(t - t_1)^2}} + k'' \dfrac{\sqrt{\varepsilon^2 - b^2(t - t_1)^2}}{\varepsilon^2} \cos\omega, \\[2ex] V'_{4,c} = -\dfrac{b^2 \sin\omega}{\sqrt{\varepsilon^2 - b^2(t - t_1)^2}} + k' \dfrac{\sqrt{\varepsilon^2 - b^2(t - t_1)^2}}{\varepsilon^2} \sin\omega, \end{cases}$$

(22)
$$\begin{cases} u_{5,c} = \dfrac{Q_{a,c}}{\varepsilon} \sin\omega, \\[2ex] v_{5,c} = -\dfrac{Q_{a,c}}{\varepsilon} \cos\omega, \end{cases}$$

$$(22')\quad \begin{cases} U''_{b,c} = \left(- a^2 \dfrac{M_{a,c}}{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2(t-t_1)^2}} + \dfrac{k'}{\varepsilon^2} Q_{a,c}\right) \sin\omega, \\ V'_{b,c} = \quad \left(a^2 \dfrac{M_{a,c}}{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2(t-t_1)^2}} - \dfrac{k'}{\varepsilon^2} Q_{a,c}\right) \cos\omega, \end{cases}$$

$$(23)\quad \begin{cases} u_{b,c} = \dfrac{Q_{b,c}}{\varepsilon} \cos\omega, \\ v_{b,c} = \dfrac{Q_{b,c}}{\varepsilon} \sin\omega, \end{cases}$$

$$(23')\quad \begin{cases} U''_{b,c} = \left(- b^2 \dfrac{M_{b,c}}{\sqrt{\varepsilon^2 - b^2(t-t_1)^2}} + \dfrac{k'}{\varepsilon^2} Q_{b,c}\right) \cos\omega, \\ V'_{b,c} = \left(- b^2 \dfrac{M_{b,c}}{\sqrt{\varepsilon^2 - b^2(t-t_1)^2}} + \dfrac{k'}{\varepsilon^2} Q_{b,c}\right) \sin\omega, \end{cases}$$

où

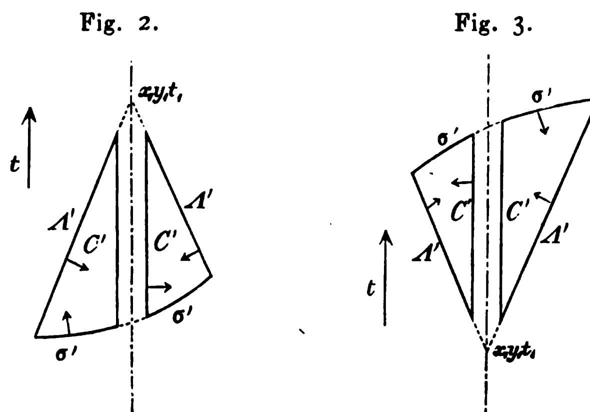
$$(24)\quad \begin{cases} M_{a,c} = \log \dfrac{\varepsilon^2 - a^2(t-t_1)^2}{\varepsilon}, \\ Q_{a,c} = \sqrt{\varepsilon^2 - a^2(t-t_1)^2} \log\left(\dfrac{\varepsilon^2 - a^2(t-t_1)^2}{e\varepsilon}\right) + a(t-t_1)\left(\operatorname{arc\,sin} \dfrac{a(t-t_1)}{\varepsilon} + c\right), \end{cases}$$

$$(24')\quad \begin{cases} M_{b,c} = \log \dfrac{\varepsilon^2 - b^2(t-t_1)^2}{\varepsilon}, \\ Q_{b,c} = \sqrt{\varepsilon^2 - b^2(t-t_1)^2} \log\left(\dfrac{\varepsilon^2 - b^2(t-t_1)^2}{e\varepsilon}\right) + b(t-t_1)\left(\operatorname{arc\,sin} \dfrac{b(t-t_1)}{\varepsilon} + c\right). \end{cases}$$

ART. 5. *Applications des résultats précédents à l'équation* (A). *Premier cas.*

1. Employons la formule (C) du premier article en prenant le champ S de la manière suivante. Conduisons le cône Λ tel que $\lambda < \operatorname{arc\,tg} a$, et par une surface σ limitons dans son intérieur une partie contiguë au sommet. Retranchons enfin du solide ainsi formé, la partie intérieure au cylindre C. Le contour Σ du champ S qu'on vient de définir sera formé de parties du cône, du cylindre, et de la surface σ

que nous appellerons respectivement Λ', C', σ'. Deux cas pourront se présenter: ou tout point de S aura une coordonnée $t < t_1$, ou l'on aura au contraire $t > t_1$. Les figures 2, 3 représentent les sections des solides



obtenues dans les deux cas par un plan parallèle à l'axe t conduit par le point $x_1 y_1 t_1$.

2. Observons maintenant que dans l'intérieur de l'espace S la fonction w_1 (voir article 2) est régulière; par suite on pourra substituer dans la formule (C) du premier article w_1 à w_λ, et en remarquant que $Z_1 = 0$, on aura

$$(1) \qquad \int_S w_1 Z dS = \int_{\Lambda'+C'+\sigma'} (w W_1 - w_1 W) d\Sigma.$$

Lorsqu'on fait l'intégration sur Λ', on doit prendre la normale dirigée vers l'intérieur du cône. Par suite sur Λ' on aura

$$w_1 = w_{1,\Lambda}, \qquad W_1 = - W_{1,\Lambda}. \qquad \text{(Voir article 4.)}$$

Au contraire sur C' on devra prendre

$$w_1 = w_{1,C}, \qquad W_1 = W_{1,C}. \qquad \text{(Voir article 4).}$$

Observons enfin que sur Λ' on aura

$$d\Sigma = \frac{r\,dt\,d\omega}{\cos\lambda}$$

et sur C',

$$d\Sigma = \varepsilon dt d\omega;$$

la formule (1) s'écrira donc

$$\int_S w_1 Z dS = \int_{\sigma'} (w W_1 - w_1 W) d\sigma - \int_{A'} (w W_{1,A} + w_{1,A} W) \frac{r dt d\omega}{\cos\lambda}$$
$$- \varepsilon \int_{C'} (w W_{1,C} - w_{1,C} W) dt d\omega.$$

Si l'on fait croître λ jusqu'à ce qu'on ait $\lambda = \operatorname{arc\,tg} a$, on trouvera $W_{1,A} = w_{1,A} = 0$ (article 4, formules (2), (2')), et par suite l'équation précédente deviendra

$$\int_S w_1 Z dS = \int_{\sigma'} (w W_1 - w_1 W) d\sigma' - \varepsilon \int_{C'} (w W_{1,C} - w_{1,C} W) dt d\omega.$$

Diminuons indéfiniment ε, on aura (voir article 4, formule (17), (17'))

$$\lim_{\varepsilon=0} \varepsilon w_{1,C} = 0, \qquad \lim_{\varepsilon=0} \varepsilon W_{1,C} = \pm a^2.$$

Fig. 4.

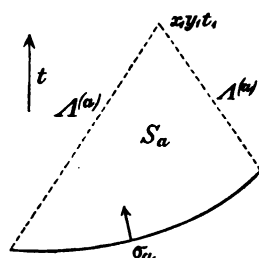
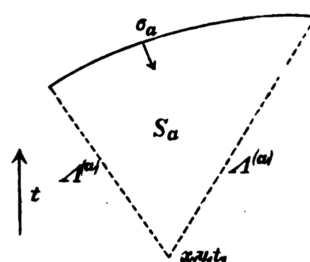


Fig. 5.



Si nous appelons donc (voir fig. 4, 5) S_a l'espace renfermé entre le cône $A^{(a)}$ dont l'ouverture est $2 \operatorname{arc\,tg} a$ et la surface σ, et que nous désignions par σ_a la partie de σ intérieure au cône, on aura

$$\int_{S_a} w_1 Z dS = \int_{\sigma_a} (w W_1 - w_1 W) d\sigma_a \pm a^2 . 2\pi \int_{t_0}^{t_1} w dt,$$

t_0 étant la coordonnée t du point où la ligne $x = x_1$, $y = y_1$ rencontre la surface σ. Dérivons par rapport à t_1 l'équation précédente. Nous obtiendrons

$$(2) \quad w(x_1, y_1, t_1) = \mp \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{1}{2\pi a^2} \int_{\sigma_a} (w W_1 - w_1 W) d\sigma_a \pm \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{1}{2\pi a^2} \int_{S_a} w_1 Z dS.$$

Mais (voir article 4, formule (2)) w_1 est nul le long du bord de la surface σ_a et du cône qui limite le solide S_a; par suite on aura (voir article 2, formule (8))

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\sigma_a} w_1 W d\sigma = \int_{\sigma_a} \frac{\partial w_1}{\partial t_1} W d\sigma_a = \pm \int_{\sigma_a} \frac{a}{\sqrt{a^2(t_1 - t)^2 - r^2}} W d\sigma_a,$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{S_a} w_1 Z dS_a = \int_{S_a} \frac{\partial w_1}{\partial t_1} Z dS_a = \pm \int_{S_a} \frac{a}{\sqrt{a^2(t_1 - t)^2 - r^2}} Z dS_a.$$

En substituant pour W_1 la valeur trouvée dans l'article 3, la formule (2) pourra donc s'écrire

$$\text{(E)} \quad w(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\sigma_a} \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1 - t)^2 - r^2}}\left(\cos nt - a^2 \frac{t_1 - t}{r}\cos nr\right) w d\sigma_a$$

$$+ \frac{1}{2\pi a}\int_{\sigma_a} \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1 - t)^2 - r^2}} W d\sigma_a + \frac{1}{2\pi a}\int_{S_a} \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1 - t)^2 - r^2}} Z dS_a.$$

Observons maintenant que W est connu lorsqu'on donne sur la surface σ_a les valeurs des dérivées du premier ordre de w, ou lorsqu'on connaît sur cette surface les valeurs de w et de sa dérivée normale. On peut donc énoncer le théorème suivant:

Lorsqu'on donne les valeurs de w et de sa dérivée normale le long de la surface σ_a et qu'on connaît les valeurs de Z dans l'intérieur de S_a, on peut déterminer la valeur de w au sommet du cône.

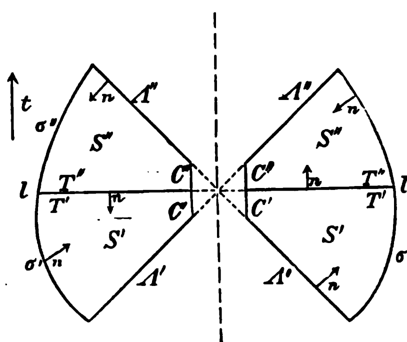
A l'aide de la formule (E) on peut effectivement calculer cette valeur par les valeurs données.

ART. 6. *Suite. Deuxième cas.*

1. Supposons qu'on ait $\lambda > \operatorname{arc\,tg} a$, 2λ étant l'ouverture du cône A. Limitons par une surface σ un champ extérieur au cône, contigu au sommet, et retranchons de ce champ la partie intérieure au cylindre C. Partageons le solide ainsi formé en deux parties par le plan T, et

appellons S' la partie dont les points ont une coordonnée $t < t_1$; S'' l'autre partie. Le contour Σ' de S' sera formé des parties des surfaces σ, Λ_1, C, T qu'on désignera respectivement par σ', Λ', C', T'. De même on indiquera par σ'', Λ'', C'', T'' les parties correspondantes du contour Σ'' de S''. Evidemment les deux surfaces T', T'' coincident, mais on devra prendre différemment la direction de la normale sur l'une et sur l'autre. (Voir fig. 6.)

Fig. 6.



2. Appliquons maintenant la formule (C) du premier article aux deux champs S', S'' en prenant $w_\lambda = w_2$. Nous choisirons pour valeur de la constante C, $\pm\frac{\pi}{2}$ selon que l'on se réfère au premier ou au deuxième champ. Appellons w_2', w_2'' les valeurs de w_2 dans les deux cas; on aura

$$\int_{S'} w_2' Z dS' = \int_{\sigma'} (wW_2 - w_2' W) d\sigma' + \int_{\Lambda'} (wW_{2,\Lambda} - w'_{2,\Lambda} W) \frac{r\,dt\,d\omega}{\cos\lambda}$$

$$+ \varepsilon \int_{C'} (wW_{2,C} - w'_{2,C} W) d\omega\,dt + \int_{T'} (wW_{2,T} - w'_{2,T} W) r\,dr\,d\omega,$$

$$\int_{S''} w_2'' Z dS'' = \int_{\sigma''} (wW_2 - w_2'' W) d\sigma' + \int_{\Lambda''} (wW_{2,\Lambda} - w''_{2,\Lambda} W) \frac{r\,dt\,d\omega}{\cos\lambda}$$

$$+ \varepsilon \int_{C''} (wW_{2,C} - w''_{2,C} W) d\omega\,dt + \int_{T''} (wW_{2,T''} - w''_{2,T} W) r\,dr\,d\omega.$$

Si λ diminue jusqu'à ce qu'il devient égal à $\operatorname{arc\,tg} a$, $w'_{2,\Lambda}$, $w''_{2,\Lambda}$, $W_{2,\Lambda}$ deviennent nuls (voir article 4, formules (3), (3')), par suite les deuxièmes

termes des seconds membres disparaissent des équations précédentes. De plus les troisièmes termes tendent vers zéro si ε diminue indéfiniment (article 4, formules (17), (17')) on aura donc à la limite

$$(1)\qquad \int_{S'} w_2' Z dS' = \int_{\sigma'} (w W_2 - w_2' W) d\sigma' + \int_{\overline{T}'} (w W_{2,r'} - w_{2,r}' W) r dr d\omega,$$

$$(2)\qquad \int_{S''} w_2'' Z dS'' = \int_{\sigma''} (w W_2 - w_2'' W) d\sigma'' + \int_{\overline{T}''} (w W_{2,r''} - w_{2,r}'' W) r dr d\omega,$$

où $\overline{T}'$, $\overline{T}''$ dénotent T', T'' prolongés jusqu'au point $x_1 y_1 t_1$.

Prenant garde aux directions des normales à T' et à T'' et aux formules (13), (13') de l'article 4, on aura

$$\int_{\overline{T}'} (w W_{2,r'} - w_{2,r}' W) r dr d\omega + \int_{\overline{T}''} (w W_{2,r''} - w_{2,r}'' W) r dr d\omega = \pi \int_{\overline{T}'} \frac{\partial w}{\partial t} r dr d\omega$$

par suite en ajoutant membre à membre les deux équations (1), (2) on trouvera

$$\int_{S'} w_2' Z dS' + \int_{S''} w_2'' Z dS'' = \int_{\sigma'} (w W_2 - w_2' W) d\sigma' + \int_{\sigma''} (w W_2 - w_2'' W) d\sigma''$$
$$+ \pi \int_{\overline{T}'} \frac{\partial w}{\partial t} r dr d\omega.$$

Appellons $\overline{S}_a$ l'espace renfermé entre le cône $\Lambda^{(a)}$ dont l'ouverture est $2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} a$ et la surface σ, et désignons par $\bar{\sigma}_a$, la partie de σ extérieure au cône.

La formule précédente pourra s'écrire

$$(3)\qquad \int_{\overline{S}_a} \operatorname{arc} \sin \frac{a(t-t_1)}{r} . Z d\overline{S}_a + \frac{\pi}{2} \int_{S'} Z dS' - \frac{\pi}{2} \int_{S''} Z dS''$$

$$= \int_{\bar{\sigma}_a} \left\{ \frac{a}{P_a} \left(\cos nt + a^2 \frac{t-t_1}{r} \cos nr \right) w - \operatorname{arc} \sin \frac{a(t-t_1)}{r} . W \right\} d\bar{\sigma}_a$$

$$- \frac{\pi}{2} \int_{\sigma'} W d\sigma' + \frac{\pi}{2} \int_{\sigma''} W d\sigma'' + \pi \int_{\overline{T}'} \frac{\partial w}{\partial t} r dr d\omega.$$

Il suffit pour le voir d'avoir égard aux formules (2) de l'article 3 et aux formules (8') de l'article 2. L'équation qu'on vient d'écrire est vraie pour toute valeur de t_1. On peut donc la dériver par rapport à cette variable. Remarquons que

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\overline{T}}\frac{\partial w}{\partial t}r\,dr\,d\alpha=\int_l\frac{\partial w}{\partial t}\cos nt.\frac{dl}{\sin\widehat{(tn)}}+\int_{\overline{T}}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}r\,dr\,d\alpha,$$

l étant la ligne d'intersection de la surface σ avec le plan T.

D'ailleurs on a

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left\{\int_{\overline{S}_a}\operatorname{arc}\sin\frac{a(t-t_1)}{r}Zd\overline{S}_a+\frac{\pi}{2}\int_{S'}ZdS'-\int_{S''}ZdS''\right\}$$

$$=-\int_{\overline{S}_a}\frac{a}{P_a}Zd\overline{S}_a+\pi\int_{\overline{T}}Zr\,dr\,d\omega,$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left\{\int_{\overline{\sigma}_a}\left\{\frac{a}{P_a}\left(\cos nt+\frac{a^2(t-t_1)}{r}\cos nr\right)w-\operatorname{arc}\sin\frac{a(t-t_1)}{r}W\right\}d\overline{\sigma}_a\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{2}\int_{\sigma'}Wd\sigma'+\int_{\sigma''}Wd\sigma''\right\}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\overline{\sigma}_a}\frac{a}{P_a}\left(\cos nt+\frac{a^2(t-t_1)}{r}\cos nr\right)wd\overline{\sigma}_a+\int_{\overline{\sigma}_a}\frac{a}{P_a}.Wd\overline{\sigma}_a-\pi\int_l W\frac{dl}{\sin\widehat{(tn)}}.$$

Par suite la dérivation de l'équation (3) par rapport à t_1 nous conduira à la formule suivante:

$$-\int_{\overline{S}_a}\frac{a}{P_a}Zd\overline{S}_a+\pi\int_{\overline{T}}Zr\,dr\,d\omega=\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\overline{\sigma}_a}\frac{a}{P_a}\left(\cos nt+\frac{a^2(t-t_1)}{r}\cos nr\right)wd\overline{\sigma}_a$$

$$+\int_{\overline{\sigma}_a}\frac{a}{P_a}Wd\overline{\sigma}_a-\pi\int_l W\frac{dl}{\sin\widehat{(tn)}}+\pi\int_l\frac{\partial w}{\partial t}\cos nt\frac{dl}{\sin\widehat{(tn)}}+\pi\int_{\overline{T}}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}r\,dr\,d\omega.$$

Mais (voir article 1, formule (5))

$$\frac{1}{\sin\widehat{(tn)}}\left(-W+\frac{\partial w}{\partial t}\cos nt\right)=a^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\cos nx}{\sin nt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\cos ny}{\sin nt}\right)$$

$$=a^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos \nu x+\frac{\partial w}{\partial y}\cos \nu y\right)=a^2\frac{\partial w}{\partial \nu},$$

ν étant la normale à la ligne l située dans le plan T et dirigée vers l'intérieur de T'; et (voir formule (A))

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-Z=a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).$$

Par suite

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int\limits_{\bar\sigma_a}\frac{a}{P_a}\left(\cos nt+\frac{a^2(t-t_1)}{r}\cos nr\right)wd\bar\sigma_a+\int\limits_{\bar\sigma_a}\frac{a}{P_a}\,Wd\bar\sigma_a+\int\limits_{\bar S_a}\frac{a}{P_a}\,Zd\bar S_a$$

$$=-\pi a^2\left\{\int\limits_l\frac{\partial w}{\partial \nu}\,dl+\int\limits_{T'}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)dT'\right\}.$$

Le dernier membre est nul par le théorème de GREEN, on a donc

$$\text{(F)}\qquad 0=\frac{\partial}{\partial t_1}\int\limits_{\bar\sigma_a}\frac{1}{\sqrt{r^2-a^2(t-t_1)}}\left(\cos nt+\frac{a^2(t-t_1)}{r}\cos nr\right)wd\bar\sigma_a$$

$$+\int\limits_{\bar\sigma_a}\frac{1}{\sqrt{r^2-a^2(t-t_1)}}\,Wd\bar\sigma_a+\int\limits_{\bar S_a}\frac{1}{\sqrt{r^2-a^2(t-t_1)}}\,Zd\bar S_a,$$

c'est à dire:

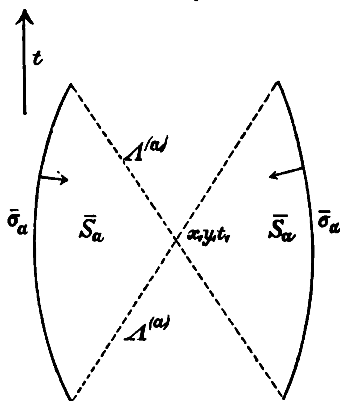
Entre les valeurs de w et de ses dérivées du premier ordre le long de la surface $\bar\sigma_a$ et les valeurs de Z dans l'intérieur de S_a a lieu la relation exprimée par la formule (F). (Voir fig. 7.)

3. Tâchons maintenant d'exprimer la valeur de w dans le point x_1, y_1, t_1 par les valeurs de w et de W sur $\bar\sigma_a$ et celles de Z dans $\bar S_a$.

A cet effet, nous appliquerons la formule (A) du premier article en prenant $w_\lambda = w_3$ avec

$$\begin{cases} c = \pm q = \pm \int_0^1 \log(1 - \theta^2) \dfrac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}, \\ c' = \pm \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

Fig. 7.



selon que l'on se réfère au premier ou au second champ. Nous appellerons w_3', w_3'', W_3', W_3'' les valeurs de w_3, W_3 dans les deux cas. Nous aurons donc

$$\int_{S'} w_3' Z dS' = \int_{\sigma'} (w W_3' - w_3' W) d\sigma' + \int_{\Lambda'} (w W_{3,\Lambda}' - w_{3,\Lambda}' W) \frac{r\,dt\,d\omega}{\cos\lambda}$$
$$+ \varepsilon \int_{C'} (w W_{3,C}' - w_{3,C}' W) dt\,d\omega + \int_{T'} (w W_{3,T'}' - w_{3,T'}' W) r\,dr\,d\omega,$$

$$\int_{S''} w_3'' Z dS'' = \int_{\sigma''} (w W_3'' - w_3'' W) d\sigma'' + \int_{\Lambda''} (w W_{3,\Lambda}'' - w_{3,\Lambda}'' W) \frac{r\,dt\,d\omega}{\cos\lambda}$$
$$+ \varepsilon \int_{C''} (w W_{3,C}'' - w_{3,C}'' W) dt\,d\omega + \int_{T''} (w W_{3,T''}'' - w_{3,T''}'' W) r\,dr\,d\omega.$$

Si l'on fait diminuer λ jusqu'à ce que l'on ait $\lambda = \text{arc tg}\, a$, les deuxièmes termes des seconds membres des équations précédentes tendent vers zéro,

et même les avant-derniers termes s'annulent si ε diminue indéfiniment. A la limite on aura

$$(4)\qquad \int_{S'} w_3' Z dS' = \int_{\sigma'} (w W_3' - w_3' W) d\sigma' + \int_{\overline{T'}} (w W_{3,r'}' - w_{3,r'}' W) r dr d\omega,$$

$$(5)\qquad \int_{S''} w_3'' Z dS'' = \int_{\sigma''} (w W_3'' - w_3'' W) d\sigma'' + \int_{\overline{T''}} (w W_{3,r''}'' - w_{3,r''}'' W) r dr d\omega.$$

Remarquons maintenant que

$$\int_{\overline{T'}} (w W_{3,r'}' - w_{3,r'}' W) r dr d\omega = \int_{\overline{T'}} \left[- w \frac{a}{r} \log r + \left(q + \frac{\pi}{2} \log r \right) \frac{\partial w}{\partial t} \right] r dr d\omega,$$

$$\int_{\overline{T''}} (w W_{3,r''}'' - w_{3,r''}'' W) r dr d\omega = \int_{\overline{T''}} \left[w \frac{a}{r} \log r + \left(q + \frac{\pi}{2} \log r \right) \frac{\partial w}{\partial t} \right] r dr d\omega,$$

par suite en ajoutant membre à membre les deux équations (4), (5), on trouvera

$$\int_{S'} w_3' Z dS + \int_{S''} w_3'' Z dS'' = \int_{\sigma'} (w W_3' - w_3' W) d\sigma' + \int_{\sigma''} (w W_3'' - w_3'' W) d\sigma''$$

$$+ 2 \int_{\overline{T'}} \left(q + \frac{\pi}{2} \log r \right) \frac{\partial w}{\partial t} r dr d\omega.$$

Substituons pour w_3', w_3'', W_3', W_3'' les valeurs qu'on tire de la formule (8″) de l'article 2 et de la formule (3) de l'article 3. En posant pour simplifier

$$f(x) = \int_0^x \log(1 - \theta^2) \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \theta^2}},$$

nous aurons

$$\int_{\overline{S}_a} \left\{ f\left(\frac{a(t-t_1)}{r}\right) + \log r \arc\sin \frac{a(t-t_1)}{r} \right\} Z d\overline{S}_a$$

$$+ \int_{S'} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right) Z dS' - \int_{S''} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right) Z dS''$$

$$= \int_{\overline{\sigma}_a} \left\{ \left[\frac{a}{P_a} \log\left(\frac{r^2 - a^2(t-t_1)^2}{r}\right)\left(\cos nt + a^2 \frac{t-t_1}{r}\cos nr\right) - a^2 \frac{\cos nr}{r} \arc\sin \frac{a(t-t_1)}{r} \right] w \right.$$

$$\left. - \left[f\left(\frac{a(t-t_1)}{r}\right) + \log r \, . \arc\sin \frac{a(t-t_1)}{r} \right] W \right\} d\overline{\sigma}_a$$

$$- a^2 \frac{\pi}{2} \left\{ \int_{\sigma'} w \frac{\partial \log r}{\partial n} d\sigma' - \int_{\sigma''} w \frac{\partial \log r}{\partial n} d\sigma'' \right\}$$

$$- \left\{ \int_{\sigma'} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right) W d\sigma' - \int_{\sigma''} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right) W d\sigma'' \right\}$$

$$+ 2 \int_{\overline{T}} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right) \frac{\partial w}{\partial t} r \, dr \, d\omega.$$

Dérivons par rapport à t. Par un calcul fort semblable à celui qu'on a fait dans l'article précédent, on trouvera

$$- \int_{\overline{S}_a} \frac{a}{P_a} \log\left(\frac{r^2 - a^2(t-t_1)^2}{r}\right) Z d\overline{S}_a + 2 \int_{T} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right) Z r \, dr \, d\omega$$

$$= \int_{\overline{\sigma}_a} \frac{a^3 \cos nr}{r P_a} w d\overline{\sigma}_a + \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\overline{\sigma}_a} \frac{a}{P_a} \log\left(\frac{r^2 - a^2(t-t_1)^2}{r}\right)\left(\cos nt + a^2 \frac{t-t_1}{r}\cos nr\right) w d\overline{\sigma}_a$$

$$+ \int_{\overline{\sigma}_a} \frac{a}{P_a} \log\left(\frac{r^2 - a^2(t-t_1)}{r}\right) W d\sigma_a - \pi a^2 \int_{l} w \frac{\partial \log r}{\partial n} \frac{dl}{\sin(tn)}$$

$$- 2 \int_{l} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right) W \frac{dl}{\sin(tn)} + 2 \int_{\overline{T}} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} r \, dr \, d\omega$$

$$+ 2 \int_{l} \left(q + \frac{\pi}{2}\log r\right) \frac{\partial w}{\partial t} \cos nt \frac{dl}{\sin(tn)}.$$

Examinons la somme des termes du second membre où paraissent les intégrales étendues sur la ligne l. Elle peut s'écrire

$$-\pi\int_l w\frac{\partial\log r}{\partial n}\frac{dl}{\sin(tn)}+2\int_l\left(q+\frac{\pi}{2}\log r\right)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\cos nt-W\right)\frac{dl}{\sin(tn)}$$

$$=-\pi a^2\int_l w\frac{\partial\log r}{\partial n}\frac{dl}{\sin(tn)}+2a^2\int_l\left(q+\frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial w}{\partial\nu}dl$$

$$=\pi a^2\int_l\left(\log r.\frac{\partial w}{\partial\nu}-w\frac{\partial\log r}{\partial\nu}\right)dl+2a^2q\int_l\frac{\partial w}{\partial\nu}dl.$$

On trouve par suite

$$\int_{\bar\sigma_a}\frac{a^2\cos nr}{rP_a}w\,d\bar\sigma_a+\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\bar\sigma_a}\frac{a}{P_a}\log\left(\frac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{r}\right)\left(\cos nt+a^2\frac{t-t_1}{r}\cos nr\right)w\,d\bar\sigma_a$$

$$+\int_{\bar\sigma_a}\frac{a}{P_a}\log\left(\frac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{r}\right)W\,d\bar\sigma_a+\int_{\bar S_a}\frac{a}{P_a}\log\left(\frac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{r}\right)Z\,d\bar S_a$$

$$=-2\int_{\bar T}\left(q+\frac{\pi}{2}\log r\right)\left(\frac{\partial^2w}{\partial t^2}-Z\right)r\,dr\,d\omega$$

$$-2a^2q\int_l\frac{\partial w}{\partial\nu}dl-\pi a^2\int_l\left(\log r.\frac{\partial w}{\partial\nu}-w\frac{\partial\log r}{\partial\nu}\right)dl$$

$$=-2a^2q\left|\int_{\bar T}\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right)r\,dr\,d\omega+\int_l\frac{\partial w}{\partial\nu}dl\right|$$

$$-\pi a^2\left|\int_{\bar T}\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right)\log r.r\,dr\,d\omega+\int_l\left(\log r.\frac{\partial w}{\partial\nu}-w\frac{\partial\log r}{\partial\nu}\right)dl\right|.$$

Mais le théorème de Green nous dit que des deux termes du second membre le premier est nul et le second est égal à $-2\pi^2a^2w(x_1y_1t_1)$. Nous aurons donc la formule

$$(\mathrm{F}') \qquad w(x_1, y_1, t_1) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_{\bar{\sigma}_a} \frac{a\cos nr}{r\sqrt{r^2 - a^2(t-t_1)^2}}\, w d\bar{\sigma}_a$$

$$-\frac{1}{2\pi^2 a}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\bar{\sigma}_a}\frac{1}{\sqrt{r^2-a^2(t-t_1)^2}}\log\left(\frac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{r}\right)\left(\cos nt + a^2\frac{t-t_1}{r}\cos nr\right) w d\bar{\sigma}_a$$

$$-\frac{1}{2\pi^2 a}\int_{\bar{\sigma}_a}\frac{1}{\sqrt{r^2-a^2(t-t_1)^2}}\log\left(\frac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{r}\right) W d\bar{\sigma}_a$$

$$-\frac{1}{2\pi^2 a}\int_{\bar{S}_a}\frac{1}{\sqrt{r^2-a^2(t-t_1)^2}}\log\left(\frac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{r}\right) Z d\bar{S}_a.$$

Cette formule fait connaitre la valeur de $w\ (x_1, y_1, t_1)$ *lorsque sont données les valeurs de* w *et de ses dérivées du premier ordre sur la surface* $\bar{\sigma}_a$ *et celles de* Z *dans l'espace* $\bar{S}_a$.

ART. 7. *Application des formules fondamentales aux équations* (B). *Premier cas.*

1. Faisons dans la formule (D) du premier article $u_\lambda = u_1$, $v_\lambda = v_1$ (voir article 2) et définissons le champ S de la même façon que nous avons fait dans le premier paragraphe du 5ème article.

En remarquant que $X_1 = Y_1 = 0$, on aura

$$\int_S (u_1 X + v_1 Y) dS = \int_{\sigma'+A'+C'} (u U_1'' + v V_1' - u_1 U' - v_1 V'') d\Sigma.$$

Si λ devient égal à $\operatorname{arc\,tg} a$, $U_{1,A}''$, $V_{1,A}'$, $u_{1,A}$, $v_{1,A}$ deviennent nuls, par suite dans cette hypothèse l'équation précédente pourra s'écrire

$$(1) \qquad \int_{S_a'} (u_1 X + v_1 Y) dS_a' = \int_{\sigma_a'+C_a'} (u U_1'' + v V_1' - u_1 U' - v_1 V'') d\Sigma,$$

S_a', σ_a', C_a' désignant S', σ', C'' lorsque $\lambda = \operatorname{arc\,tg} a$.

En posant pour simplifier

$$(2)\quad \Omega'_a = \int\limits_{\sigma'_a} \left\{ \frac{1}{R_a} \left[\left(- a^2 \frac{t_1 - t}{r} \cos nt \sin \omega + \frac{1}{2} (a^2 + a''^2) \cos ny + \frac{1}{2} k'' \beta \right) u \right.\right.$$

$$\left. - \left(a^2 \frac{t_1 - t}{r} \cos nt \cos \omega - \frac{1}{2} (a^2 + a'^2) \cos nx - \frac{1}{2} k' \alpha \right) v \right]$$

$$\left. - \frac{R_a}{r} (U' \sin \omega - V'' \cos \omega) \right\} d\sigma'_a,$$

on pourra écrire

$$\int\limits_{\sigma'_a} (u U_1'' + v V_1' - u_1 U' - v_1 V'') d\sigma'_a = \Omega'_a + \int\limits_{\sigma'_a} \frac{R_a}{r^2} (k'' \beta u - k' \alpha v) d\sigma'_a.$$

En prenant garde aux formules (18), (18') de l'article 4, on aura

$$\int\limits_{C'_a} (u U_1'' + v V_1' - u_1 U' - v_1 V'') dC'_a = \varepsilon \int\limits_{C'_a} \frac{a^2 \sin \omega}{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}} (u \sin \omega - v \cos \omega) d\omega\, dt$$

$$+ \int\limits_{C'_a} \frac{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} (k'' u \sin \omega - k' v \cos \omega) d\omega\, dt$$

$$- \int\limits_{C'_a} \frac{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} (U' \sin \omega - V'' \cos \omega) d\omega\, dt.$$

Mais sur le cylindre C'' on a

$$U' \sin \omega - V'' \cos \omega = \frac{a^2 + a'^2}{2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{a^2 + a''^2}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(- k'' \frac{\partial u}{\partial x} + k' \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sin 2\omega$$

$$+ \frac{1}{2} \left(k'' \frac{\partial u}{\partial y} + k' \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos 2\omega$$

$$= \frac{a^2 + a'^2}{2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{a^2 + a''^2}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + m \sin 2\omega + n \cos 2\omega$$

en posant

$$2m = -k''\frac{\partial u}{\partial x} + k'\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad 2n = k''\frac{\partial u}{\partial y} + k'\frac{\partial v}{\partial x};$$

donc, si pour simplifier on appelle p_a l'intégrale

$$\int_{C_a} \frac{a^2 \sin\omega}{\sqrt{a^2(t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}} (u \sin\omega - v\cos\omega)\, d\omega\, dt,$$

la formule (1) s'écrira

$$(3) \qquad \int_{S_a} (u_1 X + v_1 Y)\, dS'_a = \Omega'_a + \int_{\sigma'_a} \frac{R_a}{r^2}(k''\beta u - k'\alpha v)\, d\sigma'_a + \varepsilon p_a$$

$$+ \int_{C_a} \frac{\sqrt{a^2(t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} (k'' u \sin\omega - k' v \cos\omega)\, d\omega\, dt$$

$$- \int_{C_a} \left(\frac{a^2 + a'^2}{2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{a^2 + a'^2}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + m \sin 2\omega + n \cos 2\omega \right) \frac{\sqrt{a^2(t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}\, d\omega\, dt.$$

2. Substitutions maintenant dans la formule (1) du premier article u_2, v_2 (voir article 2) à u_λ, v_λ. Faisons augmenter l'ouverture du cône Λ, jusqu'à ce que l'on ait $\lambda = \operatorname{arc\,tg} b$, et désignons par S'_b et σ'_b ce que deviennent le champ S et la surface σ'. Par un procédé analogue à celui suivi dans le paragraphe précédent on obtiendra la formule

$$(4) \qquad \int_{S_b} (u_2 X + v_2 Y)\, dS'_b = \Omega'_b + \int_{\sigma'_b} \frac{R_b}{r^2}(k''\alpha u + k'\beta v)\, d\sigma'_b + \varepsilon p_b$$

$$+ \int_{C_b} \frac{\sqrt{b^2(t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} (k'' u \cos\omega + k' v \sin\omega)\, d\omega\, dt$$

$$+ \int_{C_b} \left(\frac{b^2 + b'^2}{2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{b^2 + b'^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + n \sin 2\omega - m \cos 2\omega \right) \frac{\sqrt{b^2(t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}\, d\omega\, dt,$$

où

$$(5)\qquad \mathfrak{L}'_b = \int\limits_{\sigma_b} \left\{ \frac{1}{R_b}\left(-b^2\frac{t_1-t}{r}\cos nt\cos\omega + \frac{1}{2}(b^2+b'^2)\cos nx + \frac{1}{2}k''\alpha\right)u \right.$$

$$+\frac{1}{R_b}\left(-b^2\frac{t_1-t}{r}\cos nt\sin\omega + \frac{1}{2}(b^2+b'^2)\cos ny + \frac{1}{2}k'\beta\right)v$$

$$\left. -\frac{R_b}{r}(U'\cos\omega + V''\sin\omega)\right\} d\sigma'_b,$$

$$p_b = \int\limits_{C_b} \frac{b^2}{\sqrt{b^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}(u\cos\omega + v\sin\omega)\,d\omega\,dt.$$

3. Cela posé, il faut dériver les deux équations (3), (4) par rapport à x_1, y_1. Pour simplifier ce calcul observons que l'on peut écrire (voir article 3, formule (8))

$$\frac{\alpha}{r^2} = -\cos nx\frac{\partial^2\log r}{\partial x_1^2} - \cos ny\frac{\partial^2\log r}{\partial x_1\partial y_1},$$

$$\frac{\beta}{r^2} = -\cos nx\frac{\partial^2\log r}{\partial x_1\partial y_1} - \cos ny\frac{\partial^2\log r}{\partial y_1^2}$$

et par suite

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\alpha}{r^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\beta}{r^2}\right) = \cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial y_1^3} + \cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial x_1^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\alpha}{r^2}\right) = -\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\beta}{r^2}\right) = -\cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial x_1^3} + \cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial y_1^3}.$$

On tire de là

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\int\limits_{\sigma_a}\frac{R_a}{r^2}(k''\beta u - k'\alpha v)\,d\sigma'_a = \int\limits_{\sigma_a}\frac{\sin\omega}{rR_a}(k''\beta u - k'\alpha v)\,d\sigma'_a$$

$$+\int\limits_{\sigma_a} R_a\left\{k''\left(\cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial x_1^3} - \cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial y_1^3}\right)u\right.$$

$$\left. - k'\left(\cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial y_1^3} + \cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial x_1^3}\right)v\right\} d\sigma'_a$$

$$-\int\limits_{g}\frac{R_a}{\varepsilon\cos nt}(k''\beta u - k'\alpha v)\sin\omega\,d\omega,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_{\sigma_b'}\frac{R_b}{r^2}(k''\alpha u + k'\beta v)d\sigma_b' = \int\limits_{\sigma_b'}\frac{\cos\omega}{rR_b}(k''\alpha u + k'\beta v)d\sigma_b'$$

$$+\int\limits_{\sigma_b'} R_b\left\{k''\left(-\cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial x_1^3} + \cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial y_1^3}\right)u\right.$$

$$\left.+ k'\left(\cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial y_1^3} + \cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial x_1^3}\right)v\right\}d\sigma_b'$$

$$-\int\limits_{g}\frac{R_b}{\varepsilon\cos nt}(k''\alpha u + k'\beta v)\cos\omega\, d\omega,$$

g étant la ligne d'intersection de la surface σ avec le cylindre C, et n, la normale à la surface σ'.

D'ailleurs on a, puisque u_1, v_1 sont nuls sur la surface du cône qui limite l'espace S_a',

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\int\limits_{S_a'}(u_1X + v_1Y)dS_a' = \int\limits_{S_a'}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1}X + \frac{\partial v_1}{\partial y_1}Y\right)dS_a' - \int\limits_{C_a}(u_1X + v_1Y)\varepsilon\sin\omega\, d\omega\,.\,dt$$

$$= \int\limits_{S_a'}\frac{1}{R_a}(X\sin^2\omega - Y\sin\omega\cos\omega)dS_a' + \int\limits_{S_a'}R_a\left(\frac{\partial^2\log r}{\partial x_1^2}X + \frac{\partial^2\log r}{\partial x_1\partial y_1}Y\right)dS_a'$$

$$-\int\limits_{C_a}(u_1X + v_1Y)\varepsilon\sin\omega\, d\omega\, dt$$

et d'une façon analogue

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_{S_b'}(u_2X + v_2Y)dS_b' = \int\limits_{S_b'}\frac{1}{R_b}(X\cos^2\omega + Y\sin\omega\cos\omega)dS_b'$$

$$-\int\limits_{S_b'}R_b\left(\frac{\partial^2\log r}{\partial x_1^2}X + \frac{\partial^2\log r}{\partial x_1\partial y_1}Y\right)dS_b' - \int\limits_{C_b}(u_2X + v_2Y)\varepsilon\cos\omega\, d\omega\, dt.$$

Observons enfin que si A est une fonction quelconque

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{C_a} A\,d\omega\,dt = \int_{C_a}\frac{\partial A}{\partial y}\,d\omega\,dt + \int_g A\frac{\cos ny}{\cos nt}\,d\omega,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{C_b} A\,d\omega\,dt = \int_{C_b}\frac{\partial A}{\partial x}\,d\omega\,dt + \int_g A\frac{\cos nx}{\cos nt}\,d\omega,$$

où n représente toujours la normale à la surface σ. On trouvera donc, en dérivant la formule (3) par rapport à y_1, et la formule (4) par rapport à x_1,

(6)
$$\int_{S_a}\frac{1}{R_a}(X\sin\omega - Y\cos\omega)\sin\omega\,dS'_a$$

$$+\int_{S_a}R_a\left(\frac{\partial^2\log r}{\partial x_1^2}X + \frac{\partial^2\log r}{\partial x_1\partial y_1}Y\right)dS'_a - \int_{C_a}(u_1X + v_1Y)\varepsilon\sin\omega\,d\omega\,dt$$

$$= \frac{\partial\Omega'_a}{\partial y_1} + \int_{\sigma_a}\frac{\sin\omega}{rR_a}(k''\beta u - k'\alpha v)\,d\sigma'_a$$

$$+\int_{\sigma_a}R_a\left\{k''\left(\cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial x_1^3} - \cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial y_1^3}\right)u\right.$$

$$\left. - k'\left(\cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial y_1^3} + \cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial x_1^3}\right)v\right\}d\sigma'_a$$

$$-\int_g\frac{R_a}{\varepsilon\cos nt}(k''\beta u - k'\alpha v)\sin\omega\,d\omega + \varepsilon\frac{\partial p_a}{\partial y_1}$$

$$+\int_{C_a}\frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\left(k''\frac{\partial u}{\partial y}\sin\omega - k'\frac{\partial v}{\partial y}\cos\omega\right)d\omega\,dt$$

$$+\int_g\frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon}(k''u\sin\omega - k'v\cos\omega)\frac{\cos ny}{\cos nt}\,d\omega$$

$$-\int_{C_a}\left(\frac{a^2+a'^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - \frac{a^2+a'^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial m}{\partial y}\sin 2\omega + \frac{\partial n}{\partial y}\cos 2\omega\right)\frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\,d\omega\,dt$$

$$-\int_g\left(\frac{a^2+a'^2}{2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{a^2+a'^2}{2}\frac{\partial u}{\partial y} + m\sin 2\omega + n\cos 2\omega\right)\frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\frac{\cos ny}{\cos nt}\,d\omega,$$

$$(7)\qquad \int_{S'_b} \frac{1}{R_b}(X\cos\omega + Y\sin\omega)\cos\omega\, dS'_b$$

$$-\int_{S'_b} R_b\left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1^2} X + \frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1 \partial y_1} Y\right) dS'_b - \int_{C_b} (u_2 X + v_2 Y)\varepsilon \cos\omega\, d\omega\, dt$$

$$= \frac{\partial \Omega'_b}{\partial x_1} + \int_{\sigma'_b} \frac{\cos\omega}{r R_b}(k''\alpha u + k'\beta v)\, d\sigma'_b$$

$$+\int_{\sigma'_b} R_b \left\{ k''\left(-\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3} + \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3}\right) u \right.$$

$$\left. + k'\left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3} + \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3}\right) v \right\} d\sigma'_b$$

$$-\int_g \frac{R_b}{\varepsilon \cos nt}(k''\alpha u + k'\beta v)\cos\omega\, d\omega + \varepsilon \frac{\partial p_b}{\partial x_1}$$

$$+\int_{C_b} \frac{\sqrt{b^2(t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}\left(k'' \frac{\partial u}{\partial x}\cos\omega + k' \frac{\partial v}{\partial x}\sin\omega\right) d\omega\, dt$$

$$+\int_g \frac{\sqrt{b^2(t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}(k'' u \cos\omega + k' v \sin\omega)\frac{\cos nx}{\cos nt}\, d\omega$$

$$+\int_{C_b} \left(\frac{b^2 + b'^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{b^2 + b'^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial n}{\partial x}\sin 2\omega - \frac{\partial m}{\partial x}\cos 2\omega\right)\frac{\sqrt{b^2(t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}\, d\omega\, dt$$

$$+\int_g \left(\frac{b^2 + b'^2}{2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{b^2 + b'^2}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + n\sin 2\omega - m\cos 2\omega\right)\frac{\sqrt{b^2(t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}\frac{\cos nx}{\cos nt}\, d\omega.$$

4. Ajoutons membre à membre les deux équations (6), (7) après les avoir multipliées respectivement par $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$.

Puis supposons que ε diminue indéfiniment et cherchons la limite de l'équation ainsi obtenue.

A cet effet remarquons que

$$\frac{R_a}{a} - \frac{R_b}{b} = \frac{(a^2 - b^2)r^2}{ab(bR_a + aR_b)}.$$

Si A est une fonction qui reste finie pour $\varepsilon = 0$, on aura

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{C'_a} A \sin\omega d\omega = \lim_{\varepsilon=0} \int_{C'_b} A \sin\omega d\omega = \lim_{\varepsilon=0} \int_{C'_a} A \cos\omega d\omega$$

$$= \lim_{\varepsilon=0} \int_{C'_b} A \cos\omega d\omega = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{C'_a} \frac{A}{\varepsilon} \sin\omega d\omega = \lim_{\varepsilon=0} \int_{C'_b} \frac{A}{\varepsilon} \sin\omega d\omega = \pm\pi \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial A}{\partial y} dt,$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{C'_a} \frac{A}{\varepsilon} \cos\omega d\omega = \lim_{\varepsilon=0} \int_{C'_b} \frac{A}{\varepsilon} \cos\omega d\omega = \pm\pi \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial A}{\partial x} dt,$$

où t_0 est la coordonnée t du point de rencontre de la ligne $x = x_1$, $y = y_1$ avec la surface σ. De même on a

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{g} A \sin\omega d\omega = \lim_{\varepsilon=0} \int_{g} A \cos\omega d\omega = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{g} \frac{A}{\varepsilon} \sin\omega d\omega = \pi\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_0,$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{g} \frac{A}{\varepsilon} \cos\omega d\omega = \pi\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_0,$$

$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_0$ étant les valeurs de $\frac{\partial A}{\partial x}$, $\frac{\partial A}{\partial y}$ pour $x = x_1$, $y = y_1$, $t = t_0$. En prenant garde à ces formules on trouvera

$$\frac{1}{a}\int\limits_{S_a}\frac{1}{R_a}(X\sin\omega - Y\cos\omega)\sin\omega\, dS_a$$

$$+\frac{1}{b}\int\limits_{S_b}\frac{1}{R_b}(X\cos\omega + Y\sin\omega)\cos\omega\, dS_b - \frac{1}{b}\int\limits_{S_b - S_a} R_b\left(\frac{\partial^2\log r}{\partial x_1^2}X + \frac{\partial^2\log r}{\partial x_1\partial y_1}Y\right)dS$$

$$-\frac{b^2-a^2}{ab}\int\limits_{S_a}\frac{r^2}{bR_a + aR_b}\left(\frac{\partial^2\log r}{\partial x_1^2}X + \frac{\partial^2\log r}{\partial x_1\partial y_1}Y\right)dS_a - 2\pi\int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)X\,dt$$

$$= \frac{1}{a}\frac{\partial\Omega_a}{\partial y_1} + \frac{1}{b}\frac{\partial\Omega_b}{\partial x_1} + \frac{1}{a}\int\limits_{\sigma_a}\frac{\sin\omega}{rR_a}(k''\beta u - k'\alpha v)\,d\sigma_a + \frac{1}{b}\int\limits_{\sigma_b}\frac{\cos\omega}{rR_b}(k''\alpha u + k'\beta v)\,d\sigma_b$$

$$-\frac{1}{b}\int\limits_{\sigma_b-\sigma_a}R_b\left\{k''\left(\cos nx\frac{\partial^2\log r}{\partial x_1^2} - \cos ny\frac{\partial^2\log r}{\partial y_1^2}\right)u\right.$$

$$\left. - k'\left(\cos nx\frac{\partial^2\log r}{\partial y_1^2} + \cos ny\frac{\partial^2\log r}{\partial x_1^2}\right)v\right\}d\sigma$$

$$-\frac{b^2-a^2}{ab}\int\limits_{\sigma_a}\frac{r^2}{bR_a + aR_b}\left\{k''\left(\cos nx\frac{\partial^2\log r}{\partial x_1^2} - \cos ny\frac{\partial^2\log r}{\partial y_1^2}\right)u\right.$$

$$\left. - k'\left(\cos nx\frac{\partial^2\log r}{\partial y_1^2} + \cos ny\frac{\partial^2\log r}{\partial x_1^2}\right)v\right\}d\sigma_a$$

$$+ 2\pi\int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\left\{a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right) + b^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)\right\}dt$$

$$- 2\pi(t_1 - t_0)\left[\frac{a^2 + a'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 - \frac{a^2 + a'^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right]\frac{\cos n_0 y}{\cos n_0 t}$$

$$+ 2\pi(t_1 - t_0)\left[\frac{b^2 + b'^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \frac{b^2 + b'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right]\frac{\cos n_0 x}{\cos n_0 t}$$

où n_0 dénote la normale à la surface σ dans le point x_1, y_1, t_0, et Ω_a, Ω_b sont égaux aux mêmes intégrales qui paraissent dans les formules (2), (5) si on les suppose étendues aux surfaces σ_a, σ_b, au lieu qu'aux surfaces σ'_a, σ'_b.

Transportons le dernier terme du premier membre de l'équation précédente dans le second membre, et les premiers six termes du second membre dans le premier. Alors le second membre de l'équation deviendra

$$2\pi\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\left\{b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(b^2-a^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+X\right\}dt$$

$$-2\pi(t_1-t_0)\left[\frac{a^2+a'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0-\frac{a^2+a'^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right]\frac{\cos n_0 y}{\cos n_0 t}$$

$$+2\pi(t_1-t_0)\left[\frac{b^2+b'^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+\frac{b^2+b'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right]\frac{\cos n_0 x}{\cos n_0 t}$$

c'est à dire, à cause de la première des équations (B') du premier article,

$$2\pi\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t_0)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dt-2\pi(t_1-t_0)\left[\frac{a^2+a'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0-\frac{a^2+a'^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right]\frac{\cos n_0 y}{\cos n_0 t}$$

$$+2\pi(t_1-t_0)\left[\frac{b^2+b'^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+\frac{b^2+b'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right]\frac{\cos n_0 x}{\cos n_0 t}$$

$$=2\pi u(x_1,y_1,t_1)-2\pi\left\{u_0+\frac{t_1-t_0}{\cos n_0 t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0\cos n_0 t+\left(\frac{a^2+a'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0-\frac{a^2+a'^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right)\cos n_0 y\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{b^2+b'^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+\frac{b^2+b'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right)\cos n_0 x\right]\right\}.$$

On tire de là la formule suivante

$$(G_1)\qquad u(x_1,y_1,t_1)$$

$$=u_0+\frac{t_1-t_0}{\cos n_0 t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0\cos n_0 t+\left(\frac{a^2+a'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0-\frac{a^2+a'^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right)\cos n_0 y\right.$$

$$\left.-\left(\frac{b^2+b'^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+\frac{b^2+b'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right)\cos n_0 x\right]$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int_{S_a}\frac{1}{R_a}(X\sin\omega-Y\cos\omega)\sin\omega\, dS_a$$

$$+\frac{1}{2\pi b}\int_{S_b}\frac{1}{R_b}(X\cos\omega+Y\sin\omega)\cos\omega\, dS_b$$

$$-\frac{1}{2\pi b}\int_{S_b-S_a}R_b\left(\frac{\partial^2\log r}{\partial x^2}X+\frac{\partial^2\log r}{\partial x\partial y}Y\right)dS$$

$$-\frac{b^2-a^2}{2\pi ab}\int_{S_a}\frac{r^2}{bR_a+aR_b}\left(\frac{\partial^2\log r}{\partial x^2}X+\frac{\partial^2\log r}{\partial x\partial y}Y\right)dS_a$$

$$-\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial\Omega_a}{\partial y_1}-\frac{1}{2\pi b}\frac{\partial\Omega_b}{\partial x_1}-\frac{1}{2\pi a}\int_{\sigma_a}\frac{\sin\omega}{rR_a}(k''\beta u-k'\alpha v)d\sigma_a$$

$$-\frac{1}{2\pi b}\int_{\sigma_b}\frac{\cos\omega}{rR_b}(k''\alpha u+k'\beta v)d\sigma_b$$

$$+\frac{1}{2\pi b}\int_{\sigma_b-\sigma_a}R_b\left\{k''\left(\cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial x_1^3}-\cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial y_1^3}\right)u\right.$$

$$\left.-k'\left(\cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial y_1^3}+\cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial x_1^3}\right)v\right\}d\sigma$$

$$-\frac{b^2-a^2}{2\pi ab}\int_{\sigma_a}\frac{r^2}{bR_a+aR_b}\left\{k''\left(\cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial x^3}-\cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial y^3}\right)u\right.$$

$$\left.-k'\left(\cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial y^3}+\cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial x^3}\right)v\right\}d\sigma_a.$$

5. Par un procédé tout à fait analogue on peut obtenir la valeur de $v(x_1, y_1, t_1)$ exprimée d'une façon semblable. Il suffit à cet effet de dériver l'équation (4) par rapport à y_1, de dériver l'équation (3) par rapport à x_1, et de les soustraire l'une de l'autre après les avoir respectivement multipliées par $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{a}$; enfin de faire évanouir ε. La formule qu'on trouve est la suivante

$$(\mathrm{G}_2)\qquad v(x_1, y_1, t_1)$$

$$= v_0 + \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t}\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 \cos n_0 t - \left(\frac{a^2 + a'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 - \frac{a^2 + a'^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right)\cos n_0 x\right.$$

$$\left. - \left(\frac{b^2 + b'^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \frac{b^2 + b'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right)\cos n_0 y\right\}$$

$$+ \frac{1}{2\pi b}\int_{S_b} \frac{1}{R_b}(X\cos\omega + Y\sin\omega)\sin\omega\, dS_b$$

$$- \frac{1}{2\pi a}\int_{S_a} \frac{1}{R_a}(X\sin\omega - Y\cos\omega)\cos\omega\, dS_a$$

$$- \frac{1}{2\pi b}\int_{S_b - S_a} R_b\left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} X + \frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2} Y\right) dS$$

$$- \frac{b^2 - a^2}{2\pi ab}\int_{S_a} \frac{r^2}{bR_a + aR_b}\left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial x \partial y} X + \frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2} Y\right) dS_a$$

$$- \frac{1}{2\pi b}\frac{\partial \Omega_b}{\partial y_1} + \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial \Omega_a}{\partial x_1} - \frac{1}{2\pi b}\int_{\sigma_b} \frac{\sin\omega}{rR_b}(k''\alpha u + k'\beta v)\, d\sigma_b$$

$$+ \frac{1}{2\pi a}\int_{\sigma_a} \frac{\cos\omega}{rR_a}(k''\beta u - k'\alpha v)\, d\sigma_a$$

$$+ \frac{1}{2\pi b}\int_{\sigma_b - \sigma_a} R_b\left\{k''\left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial y^3} + \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial x^3}\right) u\right.$$

$$\left. + k'\left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial x^3} - \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial y^3}\right) v\right\} d\sigma$$

$$- \frac{(b^2 - a^2)}{2\pi ab}\int_{\sigma_a} \frac{r^2}{bR_a + aR_b}\left\{k''\left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial y^3} + \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial x^3}\right)\right.$$

$$\left. + k'\left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial x^3} - \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial y^3}\right) v\right\} d\sigma_a.$$

6. On a donc démontré que *si l'on connaît sur la surface σ_b les valeurs de u, v, et de leurs dérivées, on peut trouver leur valeur au sommet commun des deux cônes par les formules* (G_1), (G_2). (Voir fig. 8, 9.)

Fig. 8.

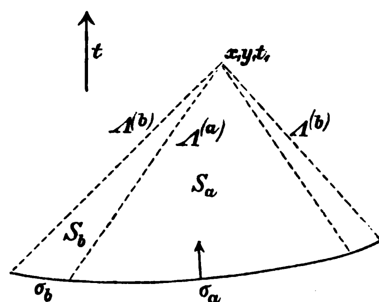
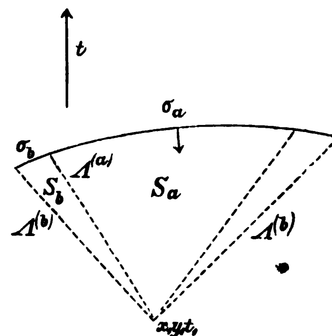


Fig. 9.



Nous avons dû faire un calcul fort laborieux et recourir à plusieurs artifices pour arriver à ce but.

Pour justifier l'emploi de ces artifices, observons qu'on ne pouvait pas faire évanouir tout de suite ε dans les formules (3), (4), car on aurait trouvé sous les signes d'intégration des fonctions qui seraient devenues infinies d'un ordre supérieur à celui qu'elles n'auraient dû dépasser afin que les intégrales aient une valeur déterminée et finie.

ART. 8. *Suite. Deuxième cas.*

1. Revenons aux champs S', S'' du 6ème article et appelons S leur ensemble. Appliquons à ce champ la formule fondamentale (D) en supposant

$$u_\lambda = u_3, \qquad v_\lambda = v_3.$$

Dans ce cas Σ sera formé de l'ensemble des surfaces σ', σ'' qu'on appellera σ, de la partie du cône Λ qu'on appellera (Λ) et de celle du cylindre C qu'on désignera par (C). On aura donc

$$\int_S (u_3 X + v_3 Y) dS = \int_{\sigma+(\Lambda)+(C)} (u U_3'' + v V_3' - u_3 U' - v_3 V'') d\Sigma$$

et à cause des formules (7), (7'), (20), (20') de l'article 4

$$\int_S (u_3 X + v_3 Y) dS = \int_\sigma (u U_3'' + v V_3' - u_3 U' - v_3 V'') d\sigma$$

$$+ \int_{(A)} \sqrt{1 - \frac{a^2}{\operatorname{tg}^2 \lambda}} \left\{ \frac{\cos\lambda}{r} (u \sin\omega - v \cos\omega) - (U' \sin\omega - V'' \cos\omega) \right\} \frac{r\,dt\,d\omega}{\cos\lambda}$$

$$+ \int_{(C)} \left\{ \frac{a^2}{\sqrt{1 - a^2\left(\frac{t - t_1}{\varepsilon}\right)^2}} (- u \sin\omega + v \cos\omega) \right.$$

$$+ \sqrt{1 - a^2\left(\frac{t - t_1}{\varepsilon}\right)^2} (k'' u \sin\omega - k' v \cos\omega)$$

$$\left. - \varepsilon \sqrt{1 - a^2\left(\frac{t - t_1}{\varepsilon}\right)^2} (U' \sin\omega - V'' \cos\omega) \right\} d\omega\, dt.$$

Si l'angle λ devient $\operatorname{arc\,tg} a$, la deuxième intégrale s'évanouit, et par suite en posant

$$a \frac{t - t_1}{\varepsilon} = \eta,$$

on aura

$$\int_S (u_3 X + v_3 Y) dS = \int_{\bar\sigma_a} (u U_3'' + v V_3' - u_3 U' - v_3 V'') d\bar\sigma_a$$

$$+ \frac{\varepsilon}{a} \int_0^{2\pi} d\omega \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{a^2}{\sqrt{1 - \eta^2}} (- u \sin\omega + v \cos\omega) \right.$$

$$\left. + \sqrt{1 - \eta^2} [k'' u \sin\omega - k' v \cos\omega - \varepsilon (U' \sin\omega - V'' \cos\omega)] \right\} d\eta$$

où l'on a désigné par $\bar\sigma_a$ la même surface que nous avons indiquée par le même symbole dans l'article 6.

Si ε devient nul le dernier terme s'évanouit et le champ S devient $\bar S_a$. On trouve donc la formule

$$(\mathrm{H}_1) \qquad \int_{\bar S_a} (u_3 X + v_3 Y) d\bar S_a = \int_{\bar\sigma_a} (u U_3'' + v V_3' - u_3 U' - v_3 V'') d\bar\sigma_a.$$

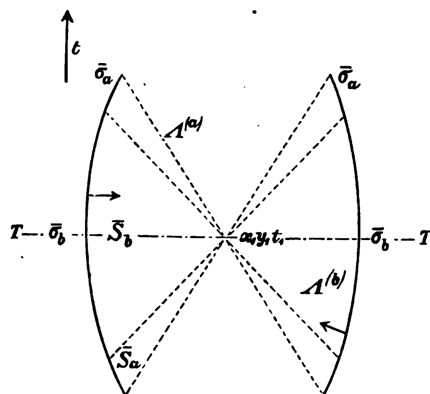
De même, si l'on appelle $\bar{S}_b$ l'espace extérieur au cône $\Lambda^{(b)}$, dont l'ouverture est $2 \operatorname{arc\,tg} b$, limité par la surface du cône et la surface $\bar{\sigma}_b$, on aura

$$(\mathrm{H}_2) \qquad \int_{\bar{S}_b} (u_4 X + v_4 Y) d\bar{S}_b = \int_{\bar{\sigma}_b} (u U_4'' + v V_4' - u_4 U' - v_4 V'') d\bar{\sigma}_b .$$

Les deux formules (H_1), (H_2) sont analogues à la formule (F) de l'article 6. Elles donnent *des relations entre* u, v *et leurs dérivées du premier ordre sur les surfaces* $\bar{\sigma}_a, \bar{\sigma}_b$, *et les valeurs de* X, Y *dans les espaces* $\bar{S}_a, \bar{S}_b$.

2. Supposons maintenant que $\bar{\sigma}_b$ soit une partie de la surface $\bar{\sigma}_a$, et cherchons d'exprimer les valeurs de u, v au point x_1, y_1, t_1 par celles des mêmes quantités et de leurs dérivées sur $\bar{\sigma}_a$ et par les valeurs de X, Y dans l'intérieur de l'espace S_a.

Fig. 10.



A cet effet nous nous servirons des dernières intégrales fondamentales que nous avons trouvées dans l'article 2.

Commençons par appliquer la formule fondamentale (D) de l'article 1 aux champs S', S'' du 6ème article en supposant

$$u_\lambda = u_5, \qquad \bar{v}_\lambda = v_5. \qquad \text{(Voir article 2.)}$$

Nous prendrons la constante arbitraire c qui paraît dans ces fonctions

égal à $\pm\frac{\pi}{2}$ selon qu'on se réfère au champ S' ou au champ S''. Nous désignerons par

$$u_{5,1}\,,\ v_{5,1}\,,\ U''_{5,1}\,,\ V'_{5,1},$$
$$u_{5,2}\,,\ v_{5,2}\,,\ U''_{5,2}\,,\ V'_{5,2},$$

les valeurs de u_5, v_5, U''_5, V'_5 dans les deux cas. On aura donc (cfr. article 6)

$$\int_{S'}(u_{5,1}X + v_{5,1}Y)dS' = \int_{\sigma'+A'+C'+T'}(uU''_{5,1} + vV'_{5,1} - u_{5,1}U' - v_{5,1}V'')d\Sigma,$$

$$\int_{S''}(u_{5,2}X + v_{5,2}Y)dS'' = \int_{\sigma''+A''+C''+T''}(uU''_{5,2} + vV'_{5,2} - u_{5,2}U' - v_{5,2}V'')d\Sigma.$$

Ayant égard aux formules (9), (9'), (11), (12) de l'article 4 on voit aisément que les intégrales étendues à A', A'' s'évanouissent lorsqu'on fait $\lambda = \operatorname{arc\,tg} a$. De même les intégrales étendues à C', C'' s'annulent à la limite lorsque ε diminue indéfiniment. C'est pourquoi en désignant par $\overline{S}_{a,1}$, $\overline{S}_{a,2}$; $\overline{\sigma}_{a,1}$, $\overline{\sigma}_{a,2}$ les deux parties de $\overline{S}_a$ et de $\overline{\sigma}_a$ qui se trouvent des deux côtés du plan T et si $\overline{T}'$, $\overline{T}''$ dénotent T', T'' prolongées jusqu'au point x_1, y_1, t_1, on aura (voir article 4, formules (15), (15'))

$$\int_{\overline{S}_{a,1}}(u_{5,1}X + v_{5,1}Y)d\overline{S}_{a,1} = \int_{\overline{\sigma}_{a,1}}(uU''_{5,1} + vV'_{5,1} - u_{5,1}U' - v_{5,1}V'')d\overline{\sigma}_{a,1}$$
$$-\frac{\pi}{2}a\int_{\overline{T}'}\frac{1}{r}(u\sin\omega - v\cos\omega)r\,dr\,d\omega - \int_{\overline{T}'}\frac{(\log r - 1)}{r}(U'\sin\omega - V''\cos\omega)r\,dr\,d\omega,$$

$$\int_{\overline{S}_{a,2}}(u_{5,2}X + v_{5,2}Y)d\overline{S}_{a,2} = \int_{\overline{\sigma}_{a,2}}(uU''_{5,2} + vV'_{5,2} - u_{5,2}U' - v_{5,2}V'')d\overline{\sigma}_{a,2}$$
$$-\frac{\pi}{2}a\int_{\overline{T}'}\frac{1}{r}(u\sin\omega - v\cos\omega)r\,dr\,d\omega - \int_{\overline{T}''}\frac{(\log r - 1)}{r}(U'\sin\omega - V''\cos\omega)r\,dr\,d\omega.$$

Si nous observons maintenant que les valeurs de U', V'' sur T', T'' sont égaux et de signes contraires (cfr. article 6) on aura, en ajoutant membre à membre les deux équations précédentes,

(1)
$$\int\limits_{\bar{S}_{a,1}}(u_{5,1}X + v_{5,1}Y)d\bar{S}_{a,1} + \int\limits_{\bar{S}_{a,2}}(u_{5,2}X + v_{5,2}Y)d\bar{S}_{a,2}$$
$$= \int\limits_{\bar{\sigma}_{a,1}}(uU''_{5,1} + vV'_{5,1} - u_{5,1}U' - v_{5,1}V'')d\bar{\sigma}_{a,1}$$
$$+ \int\limits_{\bar{\sigma}_{a,2}}(uU''_{5,2} + vV'_{5,2} - u_{5,2}U' - v_{5,2}V'')d\bar{\sigma}_{a,2}$$
$$- \pi a\int\limits_{\bar{T}}\frac{1}{r}(u\sin\omega - v\cos\omega)r\,dr\,d\omega.$$

Posons

(2)
$$\theta_a = \frac{1}{a}\Bigg\{\int\limits_{\bar{S}_{a,1}}(u_{5,1}X + v_{5,1}Y)d\bar{S}_{a,1} + \int\limits_{\bar{S}_{a,2}}(u_{5,2}X + v_{5,2}Y)d\bar{S}_{a,2}$$
$$- \int\limits_{\bar{\sigma}_{a,1}}(uU''_{5,1} + vV'_{5,1} - u_{5,1}U' - v_{5,1}V'')d\bar{\sigma}_{a,1}$$
$$- \int\limits_{\bar{\sigma}_{a,2}}(uU''_{5,2} + vV'_{5,2} - u_{5,2}U' - v_{5,2}V'')d\bar{\sigma}_{a,2}\Bigg\}$$

et remarquons que

$$\frac{\sin\omega}{r} = -\frac{\partial\log r}{\partial y_1}, \qquad \frac{\cos\omega}{r} = -\frac{\partial\log r}{\partial x_1};$$

alors l'équation (1) pourra s'écrire

(3)
$$\pi\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\int\limits_{\bar{T}}u\log r\,.\,r\,dr\,d\omega - \frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_{\bar{T}}v\log r\,.\,r\,dr\,d\omega\right] = \theta_a.$$

3. Désignons par

$$u_{6,1}\,,\; v_{6,1}\,,\; U''_{6,1}\,,\; V'_{6,1},$$
$$u_{6,2}\,,\; v_{6,2}\,,\; U''_{6,2}\,,\; V'_{6,2},$$

les valeurs de u_6, v_6, U''_6, V'_6 (voir article 2, formule (14), article 3, formule (12)) selon que l'on prend $c = \pm\frac{\pi}{2}$.

Si $\bar{S}_{b,1}$, $\bar{S}_{b,2}$; $\bar{\sigma}_{b,1}$, $\bar{\sigma}_{b,2}$ sont les parties de $\bar{S}_b$, $\bar{\sigma}_b$ qui se trouvent des deux côtés du plan T, par le procédé employé dans le paragraphe précédent on trouvera

(4) $$\pi\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{T'} u \log r . r dr d\omega + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_{T'} v \log r . r dr d\omega\right] = \theta_b$$

où l'on a posé pour simplifier

(5) $$\theta_b = \frac{1}{b}\left|\int_{\bar{S}_{b,1}}(u_{6,1}X + v_{6,1}Y)dS_{b,1} + \int_{\bar{S}_{b,2}}(u_{6,2}X + v_{6,2}Y)dS_{b,2}\right.$$
$$-\int_{\bar{\sigma}_{b,1}}(uU''_{6,1} + vV'_{6,1} - u_{6,1}U' - v_{6,1}V'')d\bar{\sigma}_{b,1}$$
$$\left.-\int_{\bar{\sigma}_{b,2}}(uU''_{6,2} + vV'_{6,2} - u_{6,2}U' - v_{6,2}V'')d\bar{\sigma}_{b,2}\right|.$$

4. Des équations (3), (4) on tire

$$\frac{\partial\theta_b}{\partial x_1} + \frac{\partial\theta_a}{\partial y_1} = \pi\Delta\int_{T'} u \log r . r dr d\omega,$$

$$\frac{\partial\theta_b}{\partial y_1} - \frac{\partial\theta_a}{\partial x_1} = \pi\Delta\int_{T'} v \log r . r dr d\omega,$$

où le symbole Δ dénote

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}.$$

Mais par un théorème bien connu relatif aux potentiels logarithmiques on a

$$\Delta\int_{T'} u \log r . r dr d\omega = 2\pi u(x_1, y_1, t_1),$$

$$\Delta\int_{T'} v \log r . r dr d\omega = 2\pi v(x_1, y_1, t_1),$$

par suite

(H'_1) $$u(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{\partial\theta_b}{\partial x_1} + \frac{\partial\theta_a}{\partial y_1}\right],$$

(H'_2) $$v(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{\partial\theta_b}{\partial y_1} - \frac{\partial\theta_a}{\partial x_1}\right].$$

Ces formules donnent les valeurs de u, v au sommet x_1, y_1, t_1 des cônes par les valeurs des mêmes quantités et de U', V'' sur la surface σ_a, et par celles de X, Y dans l'intérieur de l'espace $\overline{S}_a$. (Voir fig. 10.)

ART. 9. ***Conséquences des résultats trouvés.***

1. Les surfaces coniques Λ dont les ouvertures sont $2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} a$, $2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} b$, ont joué dans les cours de ces recherches un rôle bien important. Nous les appellerons les *surfaces caractéristiques* et nous les désignerons respectivement par $\Lambda_A^{(a)}$, $\Lambda_A^{(b)}$, A étant leur sommet.

2. Supposons pour simplifier $Z = 0$, et que l'on connaisse les valeurs de w et de W sur une surface σ quelconque. On peut se poser la question: *dans quelle partie de l'espace pourra-t-on déterminer la fonction w?*

Les formules (E), (F') que nous avons donné dans les articles 5 et 6 nous montrent qu'*on peut calculer la valeur de w dans tout point A par lequel on peut conduire un cône $\Lambda_A^{(a)}$ qui découpe, soit dans son intérieur, soit extérieurement, une partie de la surface σ dont le bord est formé seulement de l'intersection du cône avec la surface.*

Pour simplifier on dira que le cône $\Lambda_A^{(a)}$ *coupe intérieurement ou extérieurement, d'une manière complète la surface σ.*

On trouve par là bien aisément l'espace $S^{(\sigma)}$, lieu géométrique des points A, en conduisant les cônes $\Lambda_L^{(a)}$ par tous les points L du bord de la surface σ et en cherchant leur enveloppe.

3. De même, X et Y étant nuls, *si l'on connaît u, v et leurs dérivées du premier ordre sur la surface σ on pourra déterminer ces fonctions par les formules* (G_1), (G_2), (H_1'), (H_2') *dans un point B si l'on peut conduire un cône $\Lambda_B^{(b)}$ qui coupe intérieurement, d'une manière complète la surface σ, ou si l'on peut conduire un cône $\Lambda_B^{(a)}$ qui coupe extérieurement d'une manière complète la même surface.*

Par l'enveloppe des cônes $\Lambda_L^{(b)}$ et des cônes $\Lambda_L^{(a)}$ on pourra limiter l'espace qui est le lieu géométrique des points B.

4. Si la surface σ est telle qu'on peut la couper *extérieurement* d'une manière complète par des cônes $A_A^{(a)}$, alors *entre* w, W *doivent subsister les relations données par la formule* (F) *de l'article* 6.

De même si la surface σ est coupée d'une manière complète *extérieurement* par des cônes $A_B^{(a)}$, $A_B^{(b)}$, *entre* u, v, U', V'' *doivent subsister les relations données par les formules* (H_1), (H_2) *de l'article* 8.

5. Dans les expressions de U', V'' paraissent les constantes a', b', a'', b'' qui satisfont aux conditions (1) du 1er article. On peut se servir du caractère arbitraire des constantes k', k'' pour donner à a', b', a'', b'' des valeurs telles que U', V'' s'expriment par des quantités qui ont une signification mécanique. Par exemple posons

$$(1) \qquad a = a' = a'', \qquad b = b' = b'',$$

on trouvera alors

$$U' = \frac{\partial u}{\partial t} \cos nt - b^2 \vartheta \cos nx - a^2 \varpi \cos ny,$$

$$V'' = \frac{\partial v}{\partial t} \cos nt + a^2 \varpi \cos nx - b^2 \vartheta \cos ny,$$

où

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \varpi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Il est bien connu que ϑ représente la *dilatation superficielle de chaque élément parallèle au plan* xy, et que $\frac{\varpi}{2}$ représente la *composante de la rotation de chaque élément autour de l'axe Z*.

Dans l'hypothèse (1) les quantités qui paraissent au dehors des signes d'intégration dans les formules (G_1) et (G_2) de l'article 7 deviennent

$$u_0 + \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 \cos n_0 t - a^2 \varpi_0 \cos n_0 y - b^2 \vartheta_0 \cos n_0 x\right] = u_0 + \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t} U'_0,$$

$$v_0 + \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 \cos n_0 t + a^2 \varpi_0 \cos n_0 x - b^2 \vartheta_0 \cos n_0 y\right] = v_0 + \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t} V''_0.$$

Au lieu des équations (1), posons

$$(2)\qquad \begin{cases} a'^2 = a''^2 = -a^2, \\ b'^2 = b''^2 = \quad b^2 - 2a^2, \end{cases}$$

on aura alors

$$U' = \frac{\partial u}{\partial t}\cos nt - t_{11}\cos nx - t_{12}\cos ny,$$

$$V'' = \frac{\partial v}{\partial t}\cos nt - t_{12}\cos nx - t_{22}\cos ny,$$

où

$$\begin{cases} t_{11} = b^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + (b^2 - 2a^2)\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ t_{22} = b^2\dfrac{\partial v}{\partial y} + (b^2 - 2a^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ t_{12} = a^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right). \end{cases}$$

Les quantités précédentes sont *les composantes des tensions qui s'exercent dans l'intérieur du corps élastique.* Dans l'hypothèse (2) les quantités qui paraissent au déhors des signes d'intégration dans les formules (G_1), (G_2) de l'article 7 deviennent

$$u_0 + \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 \cos n_0 t - \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22})\cos n_0 x\right],$$

$$v_0 + \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 \cos n_0 t - \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22})\cos n_0 y\right].$$

6. Si l'on a

$$\alpha\cos nx + \beta\cos ny + \gamma\cos nt = 0,$$

n étant la normale à la surface σ, la quantité

$$\alpha\frac{\partial w}{\partial x} + \beta\frac{\partial w}{\partial y} + \gamma\frac{\partial w}{\partial t},$$

sera connue si l'on donne seulement les valeurs de w sur la surface σ.

Par suite si la condition

$$(3)\qquad (-a^2 \cos nx)\cos nx + (-a^2 \cos ny)\cos ny + \cos nt \,.\, \cos nt = 0$$

est satisfaite, W sera connu sur la surface σ, si l'on connaît w sur la même surface. (Cfr. formule (5) du premier article.)

L'équation (3) peut s'écrire

$$\cos^2 nt - a^2 \sin^2 nt = 0$$

d'où

$$\operatorname{tg} nt = \pm \frac{1}{a}.$$

On tire de là:

Si la surface σ est telle que $\operatorname{tg} nt = \pm \frac{1}{a}$, *la fonction w sera déterminée dans tout point de l'espace $S^{(a)}$, même si l'on connaît sur la surface σ les valeurs de w seulement.*

Il est évident que toute surface obtenue par l'enveloppe des cônes $A_M^{(a)}$ jouit de cette propriété.

ART. 10. *Particularisation des formules.*

1. Commençons par prouver que la formule de POISSON-PARSEVAL n'est qu'un cas particulier de la formule (E) de l'article 5. En effet,

Fig. 11.

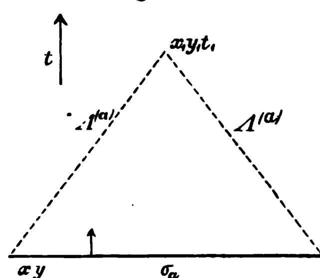
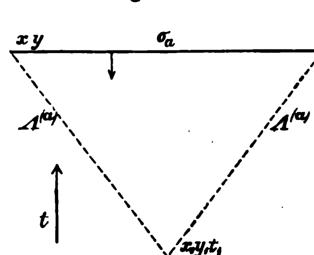


Fig. 12.



supposons que la surface σ soit le plan xy (voir fig. 11, 12). Alors σ_a deviendra un cercle dont le rayon est

$$|at_1|.$$

D'ailleurs sur σ on aura

$$\cos nt = \pm 1, \qquad \cos nx = \cos ny = 0$$

par suite, si l'on suppose $Z = 0$, l'équation (E) du $5^{\text{ème}}$ article s'écrira

$$(1) \qquad w(x_1, y_1, t_1) = \pm \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma_a} \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1 - t)^2 - r^2}} w d\sigma_a$$

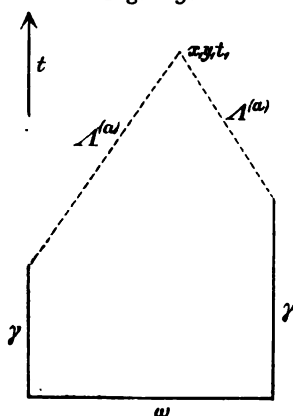
$$\pm \frac{1}{2\pi a} \int_{\sigma_a} \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1 - t)^2 - r^2}} \frac{\partial w}{\partial t} d\sigma_a$$

qui est l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

donnée par Poisson et Parseval.

Fig. 13.



2. En nous rapportant toujours à la formule (E) de l'article 5, supposons que nous nous trouvions dans le premier cas, c'est à dire que les coordonnées t des points de la surface σ soient plus petites que t_1. Examinons ce qu'on a lorsque la surface σ_a se réduit à un cylindre γ avec les génératrices parallèles à l'axe t, limité par un plan ω perpendiculaire aux génératrices, comme le montre la figure 13. Supposons enfin que l'intersection de σ avec le cône $\Lambda^{(a)}$ appartienne au cylindre γ.

Sur la surface γ on aura

$$\cos nt = 0,$$

et sur ω

$$t = \text{const.} = t_0, \qquad \cos nx = \cos ny = 0, \qquad \cos nt = 1.$$

C'est pourquoi en appelant s le contour de ω, l'équation (E) de l'article 5 deviendra, Z étant nul,

$$(2)\quad w(x_1,y_1,t_1) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t_1}\int\limits_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\,w\,d\omega + \frac{1}{2\pi a}\int\limits_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\frac{\partial w}{\partial t}\,d\omega$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t_1}\int\limits_\gamma \frac{a^2}{\sqrt{(t_1-t_0)^2a^2-r^2}}\frac{t-t_1}{r}\cos nr\,.\,w\,d\gamma - \frac{1}{2\pi a}\int\limits_\gamma \frac{a^2}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\frac{\partial w}{\partial n}\,d\gamma$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t_1}\int\limits_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\,w\,d\omega + \frac{1}{2\pi a}\int\limits_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\frac{\partial w}{\partial t}\,d\omega$$

$$+\frac{a}{2\pi}\int\limits_s ds\left|\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{t_0}^{t_1-\frac{r}{a}} \frac{t-t_1}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-r^2}}\,w\,dt - \int_{t_0}^{t_1-\frac{r}{a}} \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-r^2}}\frac{\partial w}{\partial n}\,dt\right|.$$

Posons $a(t_1-t) = u$, on aura

$$\int_{t_0}^{t_1-\frac{r}{a}} \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\frac{\partial w}{\partial n}\,dt = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial n}\int_r^{a(t_1-t_0)} w\left(x, y, t_1-\frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{t_0}^{t_1-\frac{r}{a}} \frac{t-t_1}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-r^2}}\,w\,dt = \frac{1}{a^2}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_r^{a(t_1-t_0)} \frac{-u\,du}{\sqrt{u^2-r^2}}\,w\left(x, y, t_1-\frac{u}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial}{\partial r}\int_r^{a(t_1-t_0)} w\left(x, y, t_1-\frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} = \frac{1}{a}\frac{\delta}{\delta n}\int_r^{a(t_1-t_0)} w\left(x, y, t_1-\frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}},$$

où les symboles $\frac{\partial}{\partial n}$, $\frac{\delta}{\delta n}$ ont la signification suivante. Si f est une fonction de x, y, r nous supposerons que

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n},$$

$$\frac{\delta f}{\delta n} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n}.$$

La formule (2) s'écrira donc

$$(3)\quad w(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}} w\, d\omega + \frac{1}{2\pi a}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\frac{\partial w}{\partial t}d\omega$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_s ds \left\{ \frac{\delta}{\delta n}\int_r^{a(t_1-t_0)} w\left(x, y, t_1-\frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} - \frac{\partial}{\partial n}\int_r^{a(t_1-t_0)} w\left(x, y, t_1-\frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} \right\}.$$

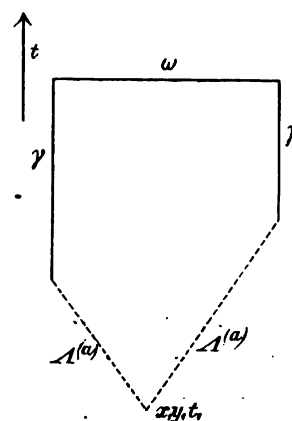
Supposons que la fonction $w(x, y, t)$ soit nulle pour toute valeur de t inférieure à une certaine limite $-T$, alors en faisant augmenter indéfiniment t_0, on trouvera

$$(4)\quad w(x_1, y_1, t_1)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_s ds \left\{ \frac{\delta}{\delta n}\int_r^{\infty} w\left(x, y, t_1-\frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} - \frac{\partial}{\partial n}\int_r^{\infty} w\left(x, y, t_1-\frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} \right\}.$$

3. Examinons maintenant le deuxième cas, c'est à dire supposons que les coordonnées t des points de σ soient supérieures à t_1, tandis que la surface σ se réduit à un cylindre γ dont les génératrices sont parallèles à t, limité par un plan ω perpendiculaire aux génératrices. Supposons enfin que l'intersection de σ avec le cône $\Lambda^{(a)}$ appartienne à γ. (Voir fig. 14.)

Fig. 14.



Par un calcul analogue à celui qu'on a fait dans le paragraphe précédent on trouve la formule

$$(5)\qquad w(x_1\,,y_1\,,t_1) = -\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t_1}\int\limits_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\,w(x\,,y\,,t_0)d\omega$$

$$-\frac{1}{2\pi a}\int\limits_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\frac{\partial w}{\partial t}d\omega$$

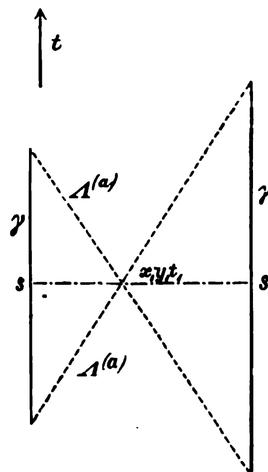
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_s \left\{\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_r^{a(t_0-t_1)} w\left(x,y,t_1+\frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} - \frac{\partial}{\partial n}\int\limits_r^{a(t_0-t_1)} w\left(x,y,t_1+\frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}\right\}.$$

Si $w(x\,,y\,,t)$ s'annule pour toute valeur de t supérieure à une certaine limite T, en faisant augmenter indéfiniment t_0, la formule précédente deviendra

$$(6)\qquad w(x_1\,,y_1\,,t_1)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_s \left\{\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_r^{\infty} w\left(x_1y_1t_1+\frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} - \frac{\partial}{\partial n}\int\limits_r^{\infty} w\left(x_1yt_1+\frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}\right\}.$$

Fig. 15.



4. Il faut maintenant chercher ce que deviennent les formules (F), (F′) de l'article 6, lorsque la surface σ_a se réduit à un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe t.

On voit tout de suite qu'en supposant toujours $Z = 0$, la formule (F) devient

$$(7) \qquad 0 = \int_s ds \left| \frac{\partial}{\partial n} \int_{-r}^{r} w\left(x, y, t_1 - \frac{u}{a}\right) \frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}} - \frac{\partial}{\partial n} \int_{-r}^{r} w\left(x, y, t - \frac{u}{a}\right) \frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}} \right|,$$

s étant la ligne d'intersection du cylindre avec le plan $t = t_1$. (Voir fig. 15.) Examinons maintenant la formule (F') (article 6). Elle s'écrira

$$w(x_1, y_1, t_1) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_s ds \left| \int_{t_1 - \frac{r}{a}}^{t_1 + \frac{r}{a}} \frac{a \cos nr}{r\sqrt{r^2 - a^2(t - t_1)^2}} w\, dt + \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{t_1 - \frac{r}{a}}^{t_1 + \frac{r}{a}} \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2(t - t_1)^2}} \log\left(\frac{r^2 - a^2(t - t_1)^2}{r}\right) \frac{t - t_1}{r} w\, dt - \int_{t_1 - \frac{r}{a}}^{t_1 + \frac{r}{a}} \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2(t - t_1)^2}} \log\left(\frac{r^2 - a^2(t - t_1)^2}{r}\right) \frac{\partial w}{\partial n} dt \right|.$$

et en posant

$$a(t - t_1) = u,$$

on trouvera

$$w(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi^2} \int_s ds \left| \frac{\partial}{\partial n} \int_{-r}^{r} w\left(x, y, t_1 - \frac{u}{a}\right) \log\left(\frac{r^2 - u^2}{r}\right) \frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}} - \frac{\partial}{\partial n} \int_{-r}^{r} w\left(x, y, t_1 - \frac{u}{a}\right) \log\left(\frac{r^2 - u^2}{r}\right) \frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}} \right|.$$

5. On pourrait tout à fait de la même façon particulariser les formules (G_1), (G_2), (H_1), (H_2), (H'_1), (H'_2) en réduisant les surfaces σ_b, $\bar{\sigma}_a$ à des cylindres ou à des plans.

Nous ne donnerons pas ici le développement de ces calculs qui d'ailleurs ne présentent de difficultés.

Art. II. *Le principe de Huyghens.*

1. Par une élégante application du théorème de Green, Kirchhoff est parvenu à établir sa célèbre formule qui étend le principe de Huyghens et peut le donner sous une forme mathématique tout à fait rigoureuse.[1]

Son procédé est fondé sur l'existence de l'intégrale

$$\frac{f(r \pm at)}{r} \tag{1}$$

de l'équation

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2}\right) \tag{1'}$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, et f dénote une fonction arbitraire.

Dans le cas des ondes cylindriques l'équation précédente devient

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2}\right) \tag{2}$$

et l'on peut démontrer qu'il n'y a pas d'intégrale de la forme

$$\lambda f(r \pm at) \tag{3}$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, λ étant une fonction de r seulement. D'ailleurs si l'on cherche les cas dans lesquels l'équation générale

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = a^2 \sum_1^m {}_i \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i^2} \tag{4}$$

---

[1] *Zur Theorie der Lichtstrahlen*, Sitzungsber. d. Berliner Akademie, 1882.

possède des intégrales de la forme (3), où $r = \left(\sum_1^m x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, et λ est une fonction de r seulement, on trouve qu'il n'y en a que deux, savoir lorsque $m = 1$, ou $m = 3$.[1] C'est pourquoi on ne donne ordinairement une formule analogue à celle de Kirchhoff dans le cas des ondes cylindriques, ni étend la même formule au cas général.

2. Ayant en vue cette extension on pourrait tâcher de trouver des intégrales de l'équation (4) ayant la forme (3) sans poser la condition que λ soit fonction de r seulement, mais supposant qu'elle soit fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

A ce propos nous allons démontrer le théorème suivant:

Les intégrales de la forme (3) *où λ est fonction de $x_1, \ldots, x_m$ existent; mais si l'on exclue les cas $m = 1$, $m = 3$, dans tous les autres, non seulement les intégrales deviennent infinies dans le point $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$, mais elles ont d'autres singularités en tout champ à m dimensions qui renferme ce point.*

Si $x_i = r\beta_i$, on aura $\sum_1^m \beta_i^2 = 1$, et par suite on pourra poser

$$\beta_1 = \cos\alpha_1, \quad \beta_2 = \sin\alpha_1 \cos\alpha_2, \ldots, \beta_{m-1} = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \ldots \sin\alpha_{m-2} \cos\alpha_{m-1},$$

$$\beta_m = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \ldots \sin\alpha_{m-2} \sin\alpha_{m-1},$$

et l'on pourra regarder λ comme une fonction de r et de $\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}$.

Posons pour simplifier

$$\Delta = \sum_1^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \qquad V = \lambda f(r + at).$$

Nous aurons

$$\Delta V = f . \Delta\lambda + \lambda\Delta f + 2\sum_1^m \frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

---

[1] Duhem, *Hydrodynamique, élasticité, acoustique.* Cours professé en 1890—91. Tome second, livre III, chap. VIII.

Mais

$$\Delta f = f'' + \frac{m-1}{r} f',$$

$$\sum_1^m \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \lambda}{\partial r} f';$$

c'est pourquoi

$$\Delta V = f''\lambda + f'\left(\frac{m-1}{r}\lambda + 2\frac{\partial \lambda}{\partial r}\right) + f\Delta\lambda.$$

D'ailleurs nous avons

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \lambda f'',$$

par suite l'équation (4) s'écrira

$$f'\left(\frac{m-1}{r}\lambda + 2\frac{\partial \lambda}{\partial r}\right) + f\Delta\lambda = 0$$

et puisque f doit être arbitraire

(5) $$\frac{m-1}{r}\lambda + 2\frac{\partial \lambda}{\partial r} = 0,$$

(6) $$\Delta\lambda = 0.$$

La première équation nous donne

$$\lambda = \theta r^{-\frac{m-1}{2}},$$

θ étant fonction de $\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}$ seulement. Par suite l'équation (6) se transforme dans la suivante

(7) $$-\frac{(m-1)(m-3)}{4}\theta + \frac{1}{\sin^{m-2}\alpha_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\sin^{m-2}\alpha_1 \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_1}\right)$$
$$+ \frac{1}{\sin^2\alpha_1 \sin^{m-3}\alpha_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\sin^{m-3}\alpha_2 \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_2}\right) + \ldots + \frac{1}{\sin^2\alpha_1 \ldots \sin^2\alpha_{m-2}}\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha_{m-1}^2} = 0.$$

Cela démontre la première partie du théorème, c'est à dire qu'il y a des intégrales de la forme (3). Dans les cas $m = 1$, $m = 3$, on pourra prendre évidemment $\theta =$ const. et par suite dans le dernier cas on aura

une singularité pour V dans le point $r=0$ seulement. Il faut maintenant prouver dans tous les autres cas l'existence de singularités dans les environs du point $r = 0$.

Supposons que l'intégrale V dans un champ Σ_m à m dimensions qui renferme le point $r=0$, n'ait d'autre singularité que dans ce point même.

Conduisons dans l'intérieur de Σ_m deux espaces sphériques S_{m-1}, Ω_{m-1} à $m - 1$ dimensions ayant le centre dans le point $r = 0$. Soit S_m l'espace à m dimensions renfermé entre S_{m-1} et Ω_{m-1}.

Désignons par W une fonction régulière dans tout l'espace renfermé dans S_{m-1} et qui satisfait à l'équation différentielle $\Delta W = 0$.

Puisque V et W sont regulières dans S_m, on aura par le théorème de Green

$$\int_{S_{m-1}} \left(V \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial V}{\partial n}\right) dS_{m-1} + \int_{\Omega_{m-1}} \left(V \frac{\partial W}{\partial n'} - W \frac{\partial V}{\partial n'}\right) d\Omega_{m-1} = 0,$$

n, n' étant les normales à S_{m-1} et Ω_{m-1} dirigées vers l'intérieur de l'espace S_m. Puisque V devient infini d'ordre $\frac{m-1}{2}$ dans le point $r = 0$, si $m > 3$, l'intégrale étendue à Ω_{m-1} s'évanouira lorsque son rayon diminuera indéfiniment, et par suite on aura

$$\int_{S_{m-1}} \left(V \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial V}{\partial n}\right) dS_{m-1} = 0.$$

Remplaçons V par son expression $\frac{\theta}{r^{\frac{m-1}{2}}}$ et remarquons que sur S_{m-1}

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}.$$

L'équation précédente s'écrira donc

$$\int_{S_{m-1}} \theta \left(\frac{1}{r^{\frac{m-1}{2}}} \frac{\partial W}{\partial r} + W \frac{m-1}{2} \frac{1}{r^{\frac{m+1}{2}}}\right) dS_{m-1} = 0.$$

Mais r est constant le long de S_{m-1}, par suite

(8) $$\int_{S_{m-1}} \theta\left(r\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{m-1}{2} W\right) dS_{m-1} = 0.$$

Remarquons que la fonction

$$r\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{m-1}{2} W = W_1$$

est une fonction qui satisfait à l'équation $\Delta = 0$. On pourra donc choisir arbitrairement les valeurs de W_1 sur S_{m-1}, pourvu qu'elles forment une fonction continue,[1] et construire après, par des formules bien connues, la fonction W_1 en sorte qu'elle soit régulière dans l'espace renfermé dans S_{m-1}. On aura alors que W sera donnée par la formule

$$W = \frac{1}{r^{\frac{m-1}{2}}} \int_0^r r^{\frac{m-3}{2}} W_1 dr$$

et par suite elle résultera régulière dans le même espace. On tire de là que la relation (8) est absurde si $m > 3$, puisque elle devrait être satisfaite pour tout système de valeurs de $r\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{m-1}{2} W$. Par conséquent la supposition que V soit regulière dans tout point de Σ_m, excepté le point $r = 0$, est elle-même absurde.

Il nous reste à examiner le cas $m = 2$. L'équation (7) devient alors

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_1^2} = \frac{1}{4}\theta$$

d'où

$$\theta = A \sin\frac{1}{2}\alpha_1 + B\cos\frac{1}{2}\alpha_1,$$

A, B étant des constantes arbitraires, et par suite

(9) $$V = \frac{A\sin\frac{1}{2}\alpha_1 + B\cos\frac{1}{2}\alpha_1}{\sqrt{r}} f(r \pm at).$$

Cette intégrale est évidemment polydrome et le point $r = 0$ est le point de diramation.

Le théorème est ainsi complètement démontré.

[1] Cette condition ne serait pas même nécessaire.

3. On peut calculer de là que si l'on applique la méthode de KIRCHHOFF aux intégrales (3) on ne pourra pas trouver de résultats semblables à ceux qu'il a obtenu. Considérons par exemple le cas des ondes cylindriques. Si nous prenons garde à la polydromie de la fonction (9), lorsque nous employerons la méthode de KIRCHHOFF, il faudra faire des coupures dans la partie du plan xy où l'on étend l'intégration, en sorte que les formules seront affectées des termes relatifs aux coupures, qui ne paraissent pas dans celles de KIRCHHOFF et par suite on ne pourra pas exprimer la valeur d'une intégrale régulière V de l'équation (2), dans un point intérieur au champ, par celles de V et de ses dérivées au contour.

Au contraire on parvient à ce résultat par les formules (4), (6), (8) de l'article précédent. Elles jouent dans le cas des ondes cylindriques un rôle tout à fait semblable à celui joué par la formule de KIRCHHOFF. Elles ont aussi la même interprétation physique que celle-ci. Considérons en effet les fonctions

$$(10) \qquad \begin{cases} V_1(r, t) = \displaystyle\int_0^\infty f\left(t - \frac{u}{a}\right) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}}, \\[2ex] V_2(r, t) = \displaystyle\int_0^\infty f\left(t + \frac{u}{a}\right) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}}, \\[2ex] V_3(r, t) = \displaystyle\int_{-r}^{r} f\left(t + \frac{u}{a}\right) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} \log\left(\frac{r^2 - u^2}{r}\right), \end{cases}$$

où f est une fonction arbitraire.

Dans la première formule nous supposerons que f s'évanouit pour toute valeur de l'argument inférieure à une certaine limite, et dans la deuxième au contraire on supposera que f s'évanouit pour les valeurs de l'argument supérieures à une certaine limite.

Les trois fonctions (10) satisfont à l'équation (2) et n'ont de singularités qu'au point $r = 0$ où elles deviennent infinies du même ordre que $\log r$.

De la même manière qu'on fait correspondre l'intégrale (1) aux

ondes sphériques on peut reférer les fonctions (10) aux ondes cylindriques progressives ou regressives, relatives à une ligne lumineuse.

En comparant donc les formules (4), (6), (8) de l'article précédent avec celle de KIRCHHOFF, on voit tout de suite qu'elles représentent sous une forme mathématique le principe de HUYGHENS dans le cas des ondes cylindriques.

On pourrait montrer que les mêmes formules peuvent s'obtenir directement des intégrales (10), mais nous ne développerons pas ici ces calculs.[1]

4. Enfin posons

$$w(x, y, t) = e^{it}\psi(x, y).$$

L'équation (2) deviendra

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + a^2\psi = 0$$

et les formules (7) et (8) de l'article 10 se réduiront aux suivantes

$$(11) \qquad \begin{cases} \psi(x_1, y_1) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_s \left(\frac{\partial\psi}{\partial n} Y_0(ar) - \psi\frac{\partial Y_0(ar)}{\partial n}\right)ds, \\[2ex] 0 = \displaystyle\int_s \left(\frac{\partial\psi}{\partial n} I_0(ar) - \psi\frac{\partial I_0(ar)}{\partial n}\right)ds \end{cases}$$

où Y_0 et I_0 dénotent les fonctions de BESSEL de deuxième et de première espèce. Les deux formules (11) ont été données par M. WEBER[2] et dépendent des équations (7), (8) de l'article 10 de la même façon que la formule bien connue découverte par M. HELMHOLTZ[3] est liée avec celle de KIRCHHOFF dont nous avons parlé dans cet article.

---

[1] Voir ma Note: *Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi.* Rend. R. Ac. dei Lincei. Vol. I, 2e Sem. Serie V, fasc. 5.

[2] *Über die Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$. Math. Annalen, Bd. I.

[3] *Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden.* Wiss. Abhandlungen. Bd. I.

ART. 12. ***Remarque relative à une question de calcul des variations.***

1. Supposons qu'on propose la question suivante: *Déterminer la fonction $U(x, y, t)$ de telle façon que la première variation de l'intégrale triple, S étant une partie de l'espace à trois dimensions x, y, t.*

$$V = \int_S F\left(U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial t}, x, y, t\right) dx dy dt$$

soit nulle, S étant une partie de l'espace à trois dimensions x, y, t.

Par les règles bien connues du calcul des variations on aura

$$0 = \delta V = \int_S \left(\frac{\partial F}{\partial U}\delta U + \frac{\partial F}{\partial U_1}\delta U_1 + \frac{\partial F}{\partial U_2}\delta U_2 + \frac{\partial F}{\partial U_3}\delta U_3\right) dx dy dt$$

où l'on a posé

$$U_1 = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad U_2 = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad U_3 = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

En supposant U_1, U_2, U_3 continues on aura par des intégrations par parties

$$0 = \delta V = \int_S \left(\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_1} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial U_2} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)\delta U dS$$

$$-\int_\sigma \left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\cos nx + \frac{\partial F}{\partial U_2}\cos ny + \frac{\partial F}{\partial U_3}\cos nt\right) d\sigma,$$

n étant la normale au contour σ dirigée vers l'intérieur de S.

On obtiendra donc l'équation du $2^{\text{ème}}$ ordre

$$\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_1} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial U_2} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial U_3} = 0. \tag{3}$$

2. Prenons garde que pour établir l'équation précédente on a supposé la continuité des dérivées U_1, U_2, U_3. On peut maintenant se proposer les questions: *U étant toujours continue, quelles seront les surfaces où les dérivées U_1, U_2, U_3 pourront être discontinues en sorte que la variation de*

V soit toujours nulle? A quelles conditions devront satisfaire les valeurs des dérivées des deux côtés des surfaces de discontinuité?

Supposons qu'il y ait une seule surface de discontinuité Λ qui partage l'espace S en deux parties S_1, S_2 et le contour en σ_1 et σ_2. Soit ν la normale à la surface Λ dirigée vers l'intérieur de S_1. On aura

$$0 = \delta V = \int_{S_1}\left(\frac{\partial F}{\partial U}\delta U + \frac{\partial F}{\partial U_1}\delta U_1 + \frac{\partial F}{\partial U_2}\delta U_2 + \frac{\partial F}{\partial U_3}\delta U_3\right)dS_1$$

$$+\int_{S_2}\left(\frac{\partial F}{\partial U}\delta U + \frac{\partial F}{\partial U_1}\delta U_1 + \frac{\partial F}{\partial U_2}\delta U_2 + \frac{\partial F}{\partial U_3}\delta U_3\right)dS_2.$$

Mais par des intégrations par parties on trouve

$$\int_{S_1}\left(\frac{\partial F}{\partial U}\delta U + \frac{\partial F}{\partial U_1}\delta U_1 + \frac{\partial F}{\partial U_2}\delta U_2 + \frac{\partial F}{\partial U_3}\delta U_3\right)dS_1$$

$$= \int_{S_1}\left(\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_1} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial U_2} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)\delta U dS_1$$

$$-\int_{\sigma_1}\left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\cos nx + \frac{\partial F}{\partial U_2}\cos ny + \frac{\partial F}{\partial U_3}\cos nt\right)\delta U d\sigma$$

$$-\int_{\Lambda}\left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\cos \nu x + \frac{\partial F}{\partial U_2}\cos \nu y + \frac{\partial F}{\partial U_3}\cos \nu t\right)\delta U d\Lambda,$$

$$\int_{S_2}\left(\frac{\partial F}{\partial U}\delta U + \frac{\partial F}{\partial U_1}\delta U_1 + \frac{\partial F}{\partial U_2}\delta U_2 + \frac{\partial F}{\partial U_3}\delta U_3\right)dS_2$$

$$= \int_{S_2}\left(\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_1} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial U_2} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)\delta U dS_2$$

$$-\int_{\sigma_2}\left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\cos nx + \frac{\partial F}{\partial U_2}\cos ny + \frac{\partial F}{\partial U_3}\cos nt\right)\delta U d\sigma$$

$$+\int_{\Lambda}\left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\cos \nu x + \frac{\partial F}{\partial U_2}\cos \nu y + \frac{\partial F}{\partial U_3}\cos \nu t\right)\delta U d\Lambda.$$

Désignons par

$$U_1', U_2', U_3', \left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)', \left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)', \left(\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)'$$

les valeurs limites de $U_1, U_2, U_3, \frac{\partial F}{\partial U_1}, \frac{\partial F}{\partial U_2}, \frac{\partial F}{\partial U_3}$, lorsqu'on s'approche indéfiniment d'un point de la surface Λ du côté de l'espace S_1, et désignons par les mêmes symboles avec deux suffixes les valeurs limites qu'on trouve lorsqu'on s'approche indéfiniment du même point du côté de S_2. Ajoutant membre à membre les deux équations précédentes, on aura alors

$$o = \int_{S_1+S_2}\left(\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_1} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial U_2} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)\delta U dS$$

$$-\int_\sigma\left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\cos nx + \frac{\partial F}{\partial U_2}\cos ny + \frac{\partial F}{\partial U_3}\cos nt\right)\delta U d\sigma$$

$$-\int_\Lambda\left\{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)''\right]\cos\nu x + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)''\right]\cos\nu y\right.$$
$$\left. + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)''\right]\cos\nu t\right\}\delta U d\Lambda.$$

Donc en tout point de S, excepté ceux qui appartiennent à Λ, il sera

$$\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_1} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial U_2} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial U_3} = o \tag{1}$$

et sur Λ on aura

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)''\right]\cos\nu x + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)''\right]\cos\nu y \tag{2}$$
$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)''\right]\cos\nu t = o.$$

Prenons sur Λ un système de coordonnées curvilignes λ, μ. Puisque U est continue on aura

$$\left(\frac{\partial U}{\partial\lambda}\right)' = \left(\frac{\partial U}{\partial\lambda}\right)'',$$
$$\left(\frac{\partial U}{\partial\mu}\right)' = \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)''$$

où les suffixes dénotent de quel côté de la surface Λ on prend les valeurs des dérivées. Les deux équations précédentes peuvent s'écrire

$$(U_1' - U_1'')\frac{\partial x}{\partial \lambda} + (U_2' - U_2'')\frac{\partial y}{\partial \lambda} + (U_3' - U_3'')\frac{\partial t}{\partial \lambda} = 0,$$

$$(U_1' - U_1'')\frac{\partial x}{\partial \mu} + (U_2' - U_2'')\frac{\partial y}{\partial \mu} + (U_3' - U_3'')\frac{\partial t}{\partial \mu} = 0,$$

d'où

$$(3) \qquad U_1' - U_1'' : U_2' - U_2'' : U_3' - U_3'' = \frac{d(y, t)}{d(\lambda, \mu)} : \frac{d(t, x)}{d(\lambda, \mu)} : \frac{d(x, y)}{d(\lambda, \mu)}$$

$$= \cos \nu x : \cos \nu y : \cos \nu z.$$

L'équation (2) deviendra donc

$$(4) \quad 0 = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)''\right](U_1' - U_1'') + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)''\right](U_2' - U_2'')$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)''\right](U_3' - U_3'').$$

L'équation (4) *nous donne une condition relative à la discontinuité, tandis que les équations* (3) *donnent les conditions auxquelles doit satisfaire la surface Λ.*

Il est évident que si, au lieu d'une seule surface, on avait plusieurs surfaces de discontinuité, sur chacune on aurait vérifiées les conditions (3), (4).

3. Appliquons les résultats qu'on vient de trouver au cas où

$$F = a^2\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] - \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + 2wZ.$$

L'équation (1), dans ce cas, se réduira à l'autre

$$a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + Z = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

c'est à dire à l'équation (A) du premier article.

Les conditions (3), (4) deviendront

$$(5)\qquad U_1' - U_1'' : U_2' - U_2'' : U_3' - U_3' = \cos\nu x : \cos\nu y : \cos\nu t,$$

$$(6)\qquad a^2\{(U_1' - U_1'')^2 + (U_2' - U_2'')^2\} - (U_3' - U_3'')^2 = 0$$

c'est à dire

$$\frac{1}{a^2} = \frac{(U_1' - U_1'')^2 + (U_2' - U_2'')^2}{(U_3' - U_3'')^2} = \frac{\cos^2\nu x + \cos^2\nu y}{\cos^2\nu t} = \mathrm{tg}^2\nu t,$$

d'où

$$\mathrm{tg}\,\nu t = \pm\frac{1}{a}.$$

Donc, dans ce cas, les surfaces de discontinuité serons les enveloppes des cônes $A_M^{(a)}$ et la condition relative à la discontinuité sera donnée par l'équation (6).

Il est aisé de voir quelle relation a lieu entre ce résultat et la théorie du choc dans un milieu élastique.

TABLE DES ARTICLES.

SUR L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D + (Ey + F)y'$

PAR

G. MITTAG-LEFFLER.

(Extrait d'une lettre à M. E. Picard.)

Les fonctions elliptiques du second degré peuvent être définies par l'équation différentielle

$$y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D.$$

Dans l'étude des équations différentielles du second ordre c'est donc un problème qui se pose de soi-même d'étudier si l'équation différentielle plus générale

$$y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D + (Ey + F)y',$$

où A, B, C, D, E, F signifient des constantes par rapport à la variable indépendante, ne pourra pas définir des fonctions de caractère rationnel [1] autres et plus générales que les fonctions elliptiques.

Dans votre mémoire couronné [2] ainsi que dans une lettre que vous m'avez adressée et qui a été publiée dans mon journal [3] vous avez indiqué les types principaux de l'équation

$$y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D + (Ey + F)y'$$

[1] Il me paraît naturel de signifier ainsi les fonctions analytiques uniformes $f(x)$ qui, n'étant pas des fonctions entières rationnelles ou transcendantes, ne possèdent pas d'autre point singulier essentiel que $x = \infty$.

[2] Journal de mathématiques, t. 5, p. 281—287.

[3] T. 17, p. 297—300.

où l'intégrale est *à apparence uniforme.* Vu l'intérêt qu'il y aurait de connaître la forme analytique des intégrales, j'ai voulu en effectuer l'intégration. J'avais obtenu *à priori* par des considérations générales qui au fond ne sont autres que celles employées par M. PAINLEVÉ,[1] que l'intégrale ayant le caractère d'être *à apparence uniforme* devait être aussi forcément de caractère rationnelle et il m'a paru intéressant de vérifier *à posteriori* ce resultat.

Voici comment j'ai procédé. La fonction $\wp(x)$ de M. WEIERSTRASS peut être définie par l'équation différentielle de second ordre

$$\wp'' = 6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2$$

dont l'intégrale générale est

$$\wp = \wp(x + x_0 \,|\, g_2, g_3),$$

où g_2 et g_3 signifient les deux invariants. L'invariant g_3 ainsi que x_0 sont des constantes arbitraires. Regardons $\wp(x + x_0 \,|\, g_2, g_3)$ dans le voisinage d'un pôle. On a

$$\wp(x + x_0 \,|\, g_2, g_3) = \frac{1}{(x + x_0)^2} + \frac{g_2}{2^2 . 5}(x + x_0)^2 + \frac{g_3}{2^2 . 7}(x + x_0)^4 + \ldots .$$

Les pôles sont de l'ordre *deux,* un des coefficients dans le développement — celui de $(x + x_0)^4$ — est arbitraire, et les coefficients suivants sont des fonctions rationnelles entières de ce coefficient.

Commençons donc par chercher les conditions pour que l'intégrale de l'équation

$$y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D + (Ey + F)y'$$

ait un pôle fixé d'une manière arbitraire dans le champ de la variable

---

[1] M. PAINLEVÉ a publié depuis, C. R. 24 juillet 1893, une courte notice où il indique la forme générale de l'intégrale, mais même en connaissant cette forme il ne paraît pas être sans importance d'avoir réellement obtenu l'intégrale dans un cas un peu général. Je saisis l'occasion pour annoncer que M. PAINLEVÉ publiera prochainement dans ce journal dans trois mémoires développés les recherches profondes et fertiles relatives aux équations différentielles, sur lesquelles des indications succinctes ont paru dernièrement dans les Comptes Rendus.

indépendante et étant de l'ordre *deux,* ainsi que les conditions pour qu'il entre dans le développement de l'intégrale dans le voisinage du pôle une autre constante arbitraire que l'affixe du pôle.

On voit d'abord, l'ordre du pôle de y^3 étant 6, l'ordre du pôle de yy' étant 5 et celui du pôle de y'' étant 4, que les deux constantes A et E doivent être égales à zéro. Supposons que $B \neq 0$ et $F \neq 0$, parce que si $B = 0$ on retombe sur les équations différentielles linéaires et si $F = 0$ on retombe sur les fonctions elliptiques.

On peut toujours, par une substitution linéaire, faire que le coefficient de y^2 devient un nombre fixé d'avance, soit 6 comme dans l'équation pour $\wp(x)$, et que le coefficient de y, comme c'était aussi le cas dans l'équation pour $\wp(x)$, devient zéro. On obtient alors

$$\text{(A)} \qquad y'' = 6y^2 + D + F.y'.$$ [1]

Mettons

$$y = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{k}{x} + \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \ldots$$

en plaçant le pôle arbitraire à $x = 0$. En introduisant cette expression dans l'équation (A) et en égalant les coefficients de la même puissance de x des deux côtés de l'égalité on obtient

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1,\\
5k &= F,\\
\alpha_0 &= -\frac{1}{12}k^2,\\
\alpha_1 &= \frac{1}{12}k^3,\\
\alpha_2 &= -\frac{1}{10}D - \frac{7}{2^4.3}k^4,\\
\alpha_3 &= \frac{11}{2.3.5}Dk + \frac{79}{2^4.3^2}k^5.
\end{aligned}$$

---

[1] Voir PICARD, loc. cit., p. 286.

En égalant les coefficients de x^2, on voit disparaître α_4, et on obtient

$$\left(3\alpha_3 + \frac{1}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} Dk + \frac{1}{2^4 \cdot 3} k^6\right) k = 0.$$

En mettant $k = 0$, on trouverait $F = 0$ et on retomberait sur l'équation de la fonction $\wp(x)$. J'ai supposé $F \neq 0$. On a donc $k \neq 0$ et les deux équations pour α_3 amènent que

$$D = -\frac{3}{2} k^4.$$

L'intégrale de l'équation (A) est donc *à apparence uniforme* s'il y a entre les constantes D et F une relation telle que l'équation prend la forme

$$(\mathrm{a}) \qquad y'' = 6y^2 - \frac{3}{2} k^4 + 5ky',$$

où k est une constante indépendante de x.

Il s'agit maintenant d'effectuer l'intégration. Je suis votre indication [1]. Je mets

$$z = y'^2 + y'(a_1 + a_2 y) + a_3 y + a_4 y^2 + a_5 y^3.$$

La fonction z aura des pôles sextuples. Or, il y entre 5 constantes arbitraires et on peut par conséquent réduire ces pôles à des pôles simples. Le coefficient d'un tel pôle simple devient

$$-\frac{2^3}{5} DF - \frac{2^2 \cdot 3}{5} F^6.$$

Mais cette expression est nulle à cause de la relation entre D et F. On obtient donc

$$z = y'^2 - 2ky'(k^2 + 2y) + k^4 y - 2k^2 y^2 - 4y^3$$

où la fonction z n'a pas de pôles. En différentiant z deux fois, en appliquant l'équation (a) pour éloigner les dérivées y'' et y''' et en éliminant y et y' entre les expressions pour z, z' et z'' on doit obtenir une relation entre z, z' et z'' dont l'intégrale n'a pas de pôles. Mais on voit de suite qu'il suffit de différentier une seule fois et qu'on obtient

$$z' = 6kz + 3k^7,$$

---

[1] Voir PICARD, loc. cit., p. 284, 285.

d'où

$$z = -\frac{k^6}{2} - k^6He^{6kx},$$

où j'indique par H une constante arbitraire. On a donc obtenu pour première intégrale de l'équation (a)

$$y'^2 - 2ky'(2y + k^2) - 4y^3 - 2k^2y^2 + k^4y + \frac{k^6}{2} + k^6He^{6kx} = 0,$$

ou

$$\left(y' - 2k\left(y + \frac{k^2}{2}\right)\right)^2 - 4\left(y + \frac{k^2}{2}\right)^3 + k^6He^{6kx} = 0.$$

Cette équation, étant de genre *un* par rapport à y et y', la variable x étant regardée comme paramètre, peut toujours être intégrée par une méthode indiquée par M. Poincaré.[1] Mais on voit immédiatement qu'on peut arriver à l'intégration par une simple substitution.

Je mets

$$y + \frac{k^2}{2} = k^2se^{2kx}.$$

Donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ds}{dx}k^2e^{2kx} + 2k\left(y + \frac{k^2}{2}\right),$$

ce qui amène

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = k^2e^{2kx}(4s^3 - H).$$

Mettons donc

$$u = e^{kx}, \qquad du = ke^{kx}dx,$$

on obtient l'équation

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - H,$$

dont l'intégrale générale est

$$s = \wp(u + u_0 \mid 0\,,\, H).$$

---

[1] Voir ce journal, t. 7, p. 5—8.

L'intégrale générale de l'équation (a) devient donc

$$(\alpha) \qquad y = (D_x e^{kx})^2 \wp(e^{kx} + e^{kx_0} \mid 0, H) - \frac{k^2}{2}$$

où x_0 et l'invariant H sont les deux constantes arbitraires.

Je viens de traiter le cas où dans l'équation

$$y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D + (Ey + F)y'$$

les deux coefficients A et E sont nuls en même temps. Supposons maintenant que A et E ne disparaissent pas simultanément. Si l'intégrale générale est de caractère rationnel elle aura la forme

$$y = \frac{\alpha}{x} + \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots$$

dans le voisinage d'un pôle dont je mets l'affixe égal à zéro, pour plus de simplicité. En égalant les puissances de x^{-3} des deux côtés de l'équation différentielle, on obtient

$$2\alpha = A\alpha^3 - E\alpha^2 \qquad \text{ou} \qquad 2 + E\alpha = A\alpha^2.$$

En mettant $y = \beta z$, on peut toujours déterminer β de telle manière que dans l'équation en z

$$2 + E = A,$$

de manière que l'équation différentielle à étudier devient

$$y'' = (E + 2)y^3 + Eyy' + By^2 + Cy + D + F.y',$$

où j'ai mis y au lieu de z. En égalant dans cette équation les coefficients de x^{-3} et de x^{-2} on obtient

$$2 + E\alpha = (2 + E)\alpha^2,$$

$$\alpha_0(3(E + 2)\alpha - E) + B\alpha - F = 0.$$

Il y a deux cas à considérer $E = -3$ et $E \neq -3$. Dans le premier cas le coefficient α_0 qui correspond à la racine $\alpha = 1$ de l'équation

$$2 + E\alpha = (2 + E)\alpha^2$$

devient arbitraire, et il y a entre les coefficients de l'équation différentielle la relation

$$B = F.$$

Mais l'intégrale complète de

(b) $$y'' + 3yy' + y^3 = B(y' + y^2) + Cy + D$$

s'obtient immédiatement, elle est

(β) $$y = \frac{z'}{z}$$

où

(β') $$z''' = Bz'' + Cz' + Dz.$$

Il entre, comme vous voyez, dans l'intégrale (β) deux constantes arbitraires et indépendantes l'une de l'autre.

Dans le second cas $E \neq -3$, on peut toujours, en mettant $y = z + \gamma$, déterminer γ de manière que dans l'équation en z on ait $B = F$, de manière que nous serons ramenés à étudier l'équation différentielle

(C) $$y'' = (E + 2)y^3 + Eyy' + B(y' + y^2) + Cy + D,$$

où j'ai mis y au lieu de z.

Le coefficient α étant déterminé par l'équation

$$2 + E\alpha = (2 + E)\alpha^2$$

il y a deux cas à considérer, $E = -2$ et $E \neq -2$. Dans le premier cas, on a pour α la seule valeur $\alpha = 1$. En égalant dans

(D) $$y'' + 2yy' = B(y' + y^2) + Cy + D$$

les puissances de x^{-2} et de x^{-1} des deux côtés de l'équation on trouve que $\alpha_0 = 0$ et que α_1 devient arbitraire, ce qui amène entre B, C et D la relation $C = 0$. Mais l'équation

(d) $$y'' + 2yy' = B(y' + y^2) + D$$

s'intègre immédiatement. En mettant

$$y' + y^2 = V,$$

on obtient

$$V' = BV + D$$

et l'intégrale devient par conséquent

$$(\delta) \qquad y = \frac{z'}{z}$$

où

$$(\delta') \qquad Bz'' = (He^{Bx} - D)z.$$

Il ne nous reste donc plus que l'étude de l'équation

$$(C) \qquad y'' = (E + 2)y^3 + Eyy' + B(y' + y^2) + Cy + D$$

où

$$E \neq -3 \quad \text{et} \quad E \neq -2.$$

L'intégrale étant

$$y = \frac{a}{x} + \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots,$$

on obtient en égalant les coefficients de x^{n-2} et en employant la relation

$$2 + E\alpha = (2 + E)\alpha^2$$

une relation de la forme

$\alpha_n(n+2)(n-3-E\alpha) =$ fonction entière et rationnelle de $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0, \alpha$.

Il y aura deux cas à considérer: $E = 0$ et $E \neq 0$. Dans le premier cas[1] le coefficient α_3 devient arbitraire et il y aura deux relations entre les coefficients B, C, D qu'on obtient en mettant $n = 3$ et $\alpha = \pm 1$ dans l'équation ci-dessus entre $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0 . \alpha$. Je transforme d'abord l'équation (C) par une substitution linéaire en

$$(E) \qquad y'' = 2y^3 + Cy + D + F.y'.$$

Les relations entre les coefficients deviennent

$$D = 0, \qquad C = -\frac{2}{3^2}F^2.$$

[1] Voir PICARD, ce journal, t. 17, p. 299.

L'équation pourra donc s'écrire

$$\text{(C)} \qquad y'' = 2y^3 - 2ky + 3ky',$$

où k indique une constante indépendante de x.

L'intégrale de cette équation est *à apparence uniforme* d'après votre terminologie. On voit que $y = \bar{y}$ étant une intégrale, $y = -\bar{y}$ sera de même une intégrale et on obtient

$$y = \pm\left(\frac{1}{x} + \frac{k}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{2}\right)^2 x + \alpha_3 x^3 + \ldots\right)$$

où α_3 reste arbitraire.

On voit donc facilement par les mêmes considérations qui j'ai employées pour l'équation (a) que

$$z = y'^2 - 2kyy' - y^4 + k^2y^2 = (y' - ky)^2 - y^4$$

n'a pas de pôle.

On a

$$z' = 4kz.$$

Donc

$$(y' - ky)^2 - y^4 = H^2k^4e^{4kx},$$

où je désigne par H une constante arbitraire.

Je mets

$$y = z.ke^{kx}$$

et j'obtiens

$$z'^2 = (ke^{kx})^2(z^4 + H^2).$$

Donc en mettant

$$u = e^{kx}, \qquad du = ke^{kx}dx,$$

et en mettant

$$s = \frac{H^2}{z^2},$$

on obtient

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 + 4H^2s = 4(s - iH)s(s + iH).$$

En employant les notations

$$s = \wp(u \mid g_2, g_3) = \wp(u \mid e_1, e_2, e_3)$$

où

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3 = 4(s-e_1)(s-e_3)(s-e_2),$$

j'obtiens donc

$$s = \wp(u \mid -4H^2, 0) = \wp(u \mid iH, 0, -iH).$$

Mais

$$\wp(u) - e_2 = \left(\frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)}\right)^2.$$

L'intégrale générale de l'équation (e) devient par conséquent

$$(\varepsilon) \qquad y = HD_x e^{kx} \frac{\sigma(e^{kx} + e^{kx_0} \mid iH, 0, -iH)}{\sigma_2(e^{kx} + e^{kx_0} \mid iH, 0, -iH)},$$

où x_0 et H sont les deux constantes d'intégration.

L'intégration de l'équation

$$(C) \qquad y'' = (E+2)y^3 + Eyy' + B(y' + y^2) + Cy + D$$

dans le cas d'une intégrale générale *à apparence uniforme* est donc effectué pour $E = 0$. J'ai déjà traité les cas $E = -3$ et $E = -2$.

Reste à traiter les autres cas. On obtient de l'équation

$$2 + E\alpha = (2+E)\alpha^2$$

pour α les deux valeurs

$$\alpha^{(1)} = 1, \qquad \alpha^{(2)} = \frac{-2}{E+2}.$$

On a de même:

$$\alpha_n(n+2)(n-3-E\alpha) = \text{fonction entière et ration-}$$

nelle de $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0, \alpha$.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale générale sera *à apparence uniforme* est qu'il y aura deux nombres entiers n_1 et n_2 tels que

$$n_1 - 3 - E\alpha^{(1)} = 0, \qquad n_2 - 3 - E\alpha^{(2)} = 0$$

et qu'il y aura entre les constantes B, C, D les deux relations qu'on obtient

en mettant le terme à droite dans l'équation ci-dessus égal à zéro après y avoir introduit n_1 et $\alpha^{(1)}$ et puis n_2 et $\alpha^{(2)}$.[1]

On obtient

$$n_1 - 3 = E, \qquad (n_1 - 1)(n_2 - 1) = 4.$$

Donc

$$n_1 = 2, \qquad n_2 = 5,$$

ou

$$n_1 = 5, \qquad n_2 = 2,$$

parce que le cas $n_1 = n_2 = 3$, ce qui amène $E = 0$, a déjà été traité. Le cas $n_1 = 5$, $n_2 = 2$ peut être ramené au cas $n_1 = 2$, $n_2 = 5$ par une substitution linéaire.

Il nous reste donc à étudier:

$$\text{(F)} \qquad y'' = y^3 - yy' + B(y' + y^2) + Cy + D.$$

Les deux relations entre les constantes B, C, D deviennent

$$D - BC = 0,$$

$$\left(\frac{2 \cdot 3 \cdot 7^2}{5^2} B^3 + 5BC + D\right)\left(\frac{2 \cdot 3}{5^2} B^3 + BC + 5D\right) = 0.$$

Il y aura donc trois cas:

$$\text{(f')} \qquad y'' = y^3 - yy' + Cy,$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(f'')} & y'' = y^3 - yy' + 5h(y' + y^2) - 7^2 . h^2 y - 5 . 7^2 . h^3 \\ \text{(f''')} & y'' = y^3 - yy' + 5h(y' + y^2) - h^2 y - 5 . h^3 \end{array}\right\} B = 5h$$

où l'intégrale générale est *à apparence uniforme.* Nous avons vu que, supposant

$$y = \frac{\alpha}{x} + \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots,$$

on aura

$$\alpha_0(3\alpha + 1) + B(\alpha - 1) = 0.$$

---

[1] Voir PICARD, loc. cit., p. 283.

On a donc pour $\alpha = 1$, $\alpha_0 = 0$. En mettant

$$V = y' + y^2$$

et en se rappelant que pour $\alpha = -2$ le coefficient α_5 devient zéro, on voit que V n'a pas d'autre pôle que celui qui correspond à $\alpha = -2$, et qu'on obtient alors

$$V = \frac{\beta}{x^2} + \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 + \dots$$

où β_4 est arbitraire. Mais cette forme est celle de l'intégrale de l'équation

$$y'' = 6y^2 - \frac{1}{2} g_2$$

ainsi que celle de l'intégrale de mon premier type

$$(a) \qquad y'' = 6y^2 - \frac{3}{2} k^4 + 5ky'.$$

Il y a donc lieu de former l'équation différentielle de second ordre en V qui correspond à (F). On obtient

$$y(V + C) = V' - BV - D,$$

et par conséquent

$$\{V'' - BV' - V(V + C)\}(V + C) = (V' - BV - D)(BV + D).$$

Donc à cause de la relation

$$D = BC$$

et si on laisse de côté un instant le cas $V + C = 0$,

$$V'' = 2BV' + V^2 + V(C - B^2) - B^2 C.$$

On voit qu'en faisant la substitution

$$V = 6z + \frac{B^2 - C}{2},$$

on est ramené à

$$z'' = 6z^2 - \frac{1}{24}(C + B^2)^2 + 2Bz'$$

qui embrasse aussi bien l'équation différentielle de second ordre de $\wp(x)$ que l'équation (a).

On obtient donc les deux équations

$$z'' = 6z^2 - \frac{1}{24}C^2,$$

$$z'' = 6z^2 - \frac{3}{2}k^4 + 5kz', \qquad h = \frac{k}{2},$$

dont la première correspond à (f') et la seconde à (f'') et (f''').

L'intégrale générale de (f') devient donc:

$$(\gamma') \qquad y = \frac{\wp'\left(x + x_0 \,\middle|\, \frac{1}{12}C^2, H\right)}{\wp\left(x + x_0 \,\middle|\, \frac{1}{12}C^2, H\right) + \frac{1}{12}C^2}$$

où x_0 et l'invariant $g_3 = H$ sont les deux constantes arbitraires.

L'intégrale générale de (f'') devient

$$(\gamma'') \qquad \begin{cases} y = \dfrac{6z'}{6z - 12h^2}, \\ z = (D_x e^{2hx})^2 \wp(e^{2hx} + e^{2hx_0} \,|\, 0, H) - 2h^2, \end{cases}$$

et l'intégrale générale de (f''') devient

$$(\gamma''') \qquad \begin{cases} y = \dfrac{6z'}{6z + 12h^2} - 5h, \\ z = (D_x e^{2hx})^2 \wp(e^{2hx} + e^{2hx_0} \,|\, 0, H) - 2h^2. \end{cases}$$

Les deux constantes arbitraires en (γ'') et (γ''') sont x_0 et l'invariant H.

J'avais laissé de côté le cas

$$V' + C = 0 \quad \text{ou} \quad y' + y^2 + C = 0.$$

On voit immédiatement que l'intégration de cette équation différentielle nous donne une intégrale singulière avec une seule constante arbitraire pour nos équations différentielles (f).

THÉORIE DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES D'UNE VARIABLE

(Premier Mémoire)

PAR

K. HENSEL

À BERLIN.

Traduit par M. G. Brincard à Paris.

§ 1. *Des fonctions rationnelles à une variable et des formes rationnelles homogènes.*

Toute fonction entière de x

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$$

à coefficients constants peut se mettre, comme on le sait, à une constante multiplicative près, sous la forme d'un produit de facteurs linéaires distincts ou égaux entre eux, en nombre égal à son degré en x; cette décomposition ne pouvant d'ailleurs se faire que d'une seule façon. On pourra donc écrire

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_m),$$

les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ étant des nombres réels ou complexes qu'on pourra calculer avec telle approximation qu'on voudra.

On est donc conduit tout naturellement, par analogie avec la dénomination adoptée dans la théorie des nombres, à appeler les facteurs linéaires irréductibles $(x - \alpha_i)$ les facteurs premiers de la fonction $f(x)$. On peut aussi définir ceux-ci comme des fonctions entières de x qui n'ont qu'un seul zéro.

Dans ces considérations d'un ordre plus arithmétique toute constante a différente de zéro doit être regardée comme une unité de même qu'on le fait en arithmétique pour les quantités $+1$ et -1; et cela d'abord

parce qu'elle ne peut être divisible par aucun facteur premier $(x-\alpha)$, ensuite parce que toute fonction entière de x reste entière quand on la divise par une constante, c'est à dire que toute fonction entière est divisible par une constante.

Toute fonction rationnelle de x peut se mettre sous la forme d'un quotient de deux fonctions entières de la même variable, à savoir:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}=\frac{a_0(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_m)}{b_0(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_n)},$$

où les m quantités $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$ sont distinctes des n valeurs $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ parce qu'on peut supposer le numérateur et le dénominateur débarrassés de leurs facteurs communs. Si on ne considère maintenant que des valeurs finies de la variable x, cette fonction fractionnaire

$$y=\frac{f(x)}{g(x)} \tag{1}$$

s'annulera seulement pour les zéros $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ des facteurs premiers du numérateur tandis qu'elle ne prendra des valeurs infinies que pour les zéros du dénominateur. Cette fonction ne possède donc pas d'autres zéros ni d'autres infinis que les zéros des facteurs premiers de son numérateur et de son dénominateur. En général cependant il n'en est plus ainsi quand la variable x peut prendre aussi des valeurs infinies ainsi que le cas se présente dans le théorie des courbes algébriques. C'est ainsi que pour de très grandes valeurs de x la fonction y considérée tend vers la valeur limite

$$\frac{a_0}{b_0}x^{m-n}=\frac{a_0}{b_0}\frac{1}{x^{n-m}},$$

donc pour $x=\infty$ la fonction y devient ou bien infinie ou bien nulle selon que $m>n$ ou que $m<n$; et dans les deux cas il faut compter $x=\infty$ comme infini ou comme zéro autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre $|m-n|$.

Toute fonction rationnelle de x possède donc autant de zéros que d'infinis et leur nombre est égal au plus grand des entiers m et n, qui désignent les degrés du numérateur et du dénominateur. Il résulte de là qu'un facteur linéaire $(x-\alpha)$ n'a en aucune façon le caractère d'une fonction première aussitôt que la variable x peut prendre des valeurs

infinies; car il est vrai que $(x - \alpha)$ n'a qu'un zéro $x = \alpha$, mais il a encore un infini $x = \infty$; il ne diffère donc de la fraction

$$\frac{x - \alpha}{x - \beta}$$

qu'en ce point, bien insignifiant d'ailleurs, à savoir: que cette dernière devient infinie pour la valeur *finie* $x = \beta$.

De ce qui précède il résulte qu'il n'existe aucune fonction de x, entière ou rationnelle, n'ayant qu'un zéro et ne possédant pas d'infini; une pareille fonction aurait seule le caractère d'une véritable fonction première. Il est cependant aisé de former une fonction première, si au lieu de considérer une seule fonction on en prend un faisceau.

Soit u une constante arbitraire, la fraction

$$(2) \qquad y = \frac{x}{x - u}$$

possède un seul zéro pour $(x = 0)$ et un infini pour $(x = u)$. Faisons maintenant varier u, l'infini de y change de position tandis que son zéro reste fixe. Considérons donc le faisceau de fonctions qu'on obtient en donnant au paramètre u toutes les valeurs possibles; chacune aura un même zéro pour $(x = a)$, mais les infinis de ces fonctions seront tous différents.

Considérons l'équation (2) comme celle d'une courbe, u ayant reçu une valeur arbitraire, et posons

$$x - u = \xi, \qquad y - 1 = \eta;$$

elle se réduit à

$$\xi\eta = u$$

et représente une hyperbole dont les asymptotes $(\xi = 0, \eta = 0)$ sont parallèles aux axes; dont le centre a les coordonnées $x_0 = u, y_0 = 1$ et dont les sommets se trouvent à une distance $\sqrt{2u}$ du centre. La branche inférieure de cette hyperbole passe par l'origine des coordonnées, quelle que soit la valeur du paramètre u, tandis que l'une de ses asymptotes $x = u$ se trouve variable avec u. Toutes les hyperboles du faisceau précédent, u étant un paramètre variable, se coupent donc à l'origine des

coordonnées, ce point est donc le zéro commun de toute la série, tandis que deux hyperboles du faisceau n'ont pas le même infini. Quelle que soit donc la valeur particulière donnée à la variable x, on pourra toujours choisir u, et cela d'une infinité de manières, de façon que y ne devienne pas infini pour la valeur considérée, il suffit évidemment pour cela de prendre $u \gtrless x$.

C'est dans ce sens qu'on peut dire que la fonction $\frac{x}{x-u}$ pour u indéterminé n'a qu'un zéro fixe pour $(x = 0)$ et aucun infini fixe.

On reconnaît de même que toutes les fonctions du faisceau

$$y = \frac{1}{x-u} \tag{2 a}$$

ont un zéro fixe pour $(x = \infty)$, sans posséder un infini indépendant du paramètre. Car une fonction arbitraire de la série devient infinie pour $x = u$ seulement, c'est à dire pour une valeur de la variable qui change avec le paramètre lui-même. Si dans l'équation (2 a) on pose

$$x - u = \xi, \qquad y = \eta$$

l'équation de la courbe correspondante s'écrira:

$$\xi\eta = 1;$$

le faisceau est donc composé d'hyperboles équilatères, dont les asymptotes sont parallèles aux axes et dont les centres ont les coordonnées

$$x_0 = u, \qquad y_0 = 0.$$

L'axe des x étant une asymptote commune du faisceau toutes les courbes se coupent au point situé à l'infini sur cet axe; et, comme l'autre asymptote varie avec le paramètre u, deux hyperboles de la série n'auront jamais un infini commun.

C'est dans ce sens qu'on peut dire que la fonction $\frac{1}{x-u}$ possède un zéro fixe pour $(x = \infty)$ sans avoir d'infini fixe, u étant toujours considéré comme indéterminé.

Si l'on pose

$$x_1 = \frac{x}{x-u}, \qquad x_2 = \frac{1}{x-u}, \tag{2 b}$$

u représentant un paramètre indéterminé, on a deux fonctions qui ne possèdent des zéros fixes que pour $(x = 0)$ et pour $(x = \infty)$, et qui ne possèdent aucun infini fixe.

On voit de même que toute fonction linéaire et homogène de x_1 et x_2

$$\alpha' x_1 - \alpha'' x_2 = \frac{\alpha' x - \alpha''}{x - u}$$

possède, pour des valeurs indéterminées de u, un et un seul zéro fixe et aucun infini.

Si donc on n'astreint la variable x à aucune condition, on voit qu'on peut, qu'on doit même, considérer ces formes linéaires et homogènes de x_1 et x_2 comme les véritables facteurs premiers des fonctions de x, et on peut, en effet, montrer très facilement que toute fonction rationnelle de x peut se décomposer d'une seule manière en ces formes linéaires.

Des deux équations (2 b) qui donnent x_1 et x_2 on est conduit immédiatement à l'identité:

$$x = \frac{x_1}{x_2}$$

qui donne ainsi la variable x sous la forme d'un quotient dont le numérateur s'annule seulement pour le zéro et dont le dénominateur s'annule seulement pour l'infini de la variable x.

Si maintenant on remplace x par cette valeur $\frac{x_1}{x_2}$ dans une fonction rationnelle arbitraire de x, entière ou fractionnaire, de la forme:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)},$$

multipliant numérateur et dénominateur par x_2^m, m étant l'exposant des deux polynomes $f(x)$ et $g(x)$ le plus élevé, on obtient l'expression:

$$y = \frac{f(x_1, x_2)}{g(x_1, x_2)} = \frac{a_0 x_1^m + a_1 x_1^{m-1} x_2 + \ldots + a_m x_2^m}{b_0 x_1^m + b_1 x_1^{m-1} x_2 + \ldots + b_m x_2^m},$$

où $f(x_1, x_2)$ et $g(x_1, x_2)$ représentent des fonctions homogènes et entières de degré m en x_1 et x_2 qui n'ont, comme $f(x)$ et $g(x)$, aucun facteur linéaire commun.

Chacune de ces deux fonctions peut, comme on le sait, être mise d'une et d'une seule façon sous la forme d'un produit de facteurs linéaires

dont le nombre est égal à la dimension de f et de g (abstraction faite d'une constante multiplicative ou ce qui est la même chose d'une unité).

Cette décomposition effectuée, y s'écrira:

$$y = \frac{(\alpha'_1 x_1 - \alpha''_1 x_2)\ldots(\alpha'_m x_1 - \alpha''_m x_2)}{(\beta'_1 x_1 - \beta''_1 x_2)\ldots(\beta'_m x_1 - \beta''_m x_2)};$$

on voit alors que la fonction y ne s'annulera que dans le cas seul ou x prendra l'une des valeurs:

$$x = \frac{\alpha''_i}{\alpha'_i}, \qquad (i=1,2,3,\ldots,m)$$

car alors, pour toute valeur de u, un des facteurs du numérateur s'annule et l'indéterminée u qui ne figure pas dans y peut toujours être déterminée de façon que pour chaque autre valeur de x aucun des facteurs du second membre ne puisse devenir nul ou infini. On reconnaît de même que y peut devenir infini dans le cas seul ou x prend une valeur égale à l'un des zéros du dénominateur, c'est à dire quand

$$x = \frac{\beta''_i}{\beta'_i}. \qquad (i=1,2,3,\ldots,m)$$

Nous venons donc, en résumé, de représenter toute fonction rationnelle et arbitraire de x par le quotient de deux produits de facteurs premiers et nous avons vu que les facteurs du numérateur déterminent tous les zéros, ceux du dénominateur tous les infinis de la fonction. On reconnaît de suite que dans ce mode de représentation de y par le quotient de deux fonctions homogènes de x_1 et x_2, on ne considère uniquement que ses zéros, quantités indépendantes du paramètre u et par conséquent fixes, tandis que les infinis qui dépendent du paramètre u ne sauront figurer aucunement dans y, parce que y est indépendant de u. Aussi dans ce qui va suivre allons-nous nous occuper seulement des zéros fixes de ces formes.

Toute fonction rationnelle pouvant se mettre sous la forme du quotient de deux formes entières de (x_1, x_2), nous n'aurons à examiner que les formes entières et homogènes du type

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^m + a_1 x_1^{m-1} x_2 + \ldots + a_m x_2^m$$

et dans celles-ci il suffira de considérer leurs zéros fixes indépendants de u.

Toute forme entière peut être décomposée explicitement et d'une seule façon en un produit de formes linéaires et homogènes en nombre égal à son degré d'homogénéité et leurs zéros sont également les zéros fixes de la forme homogène. Une forme homogène et *entière* ne possède aucun infini.

Au lieu de représenter les formes $f(x_1, x_2)$ par les fonctions (x_1, x_2) avec les zéros fixes (o) et (∞), on peut choisir deux autres formes linéaires

$$\xi_1 = \alpha' x_1 - \alpha'' x_2,$$
$$\xi_2 = \beta' x_1 - \beta'' x_2,$$

avec les zéros $\frac{\alpha''}{\alpha'}$ et $\frac{\beta''}{\beta'}$; ceux-ci ne devront cependant pas coïncider, c'est à dire que les formes ξ_1 et ξ_2 ne doivent pas être équivalentes. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que le déterminant

$$\alpha'\beta'' - \beta'\alpha''$$

soit différent de zéro. S'il en est ainsi, les deux équations précédentes pourront être résolues sous la forme

$$x_1 = \gamma'\xi_1 - \gamma''\xi_2,$$
$$x_2 = \delta'\xi_1 - \delta''\xi_2,$$

et en faisant cette substitution une forme homogène $f(x_1, x_2)$ se transformera en une autre forme de (ξ_1, ξ_2) de degré égal. Si on pose $\frac{\xi_1}{\xi_2} = \xi$, la fonction ξ aura comme zéro fixe $\left(x = \frac{\alpha''}{\alpha'}\right)$ et comme infini fixe $\left(x = \frac{\beta''}{\beta'}\right)$ et s'écrira

$$\xi = \frac{\alpha' x_1 - \alpha'' x_2}{\beta' x_1 - \beta'' x_2} = \frac{\alpha' x - \alpha''}{\beta' x - \beta''}.$$

ξ se trouve donc être dans ce cas une fraction dont les deux termes sont des fonctions linéaires de x.

La transformation linéaire et homogène de (x_1, x_2) correspond donc entièrement à la transformation fractionnaire et linéaire la plus générale de x.

Si on considère maintenant une forme homogène et *fractionnaire* de (x_1, x_2):

$$F(x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{g(x_1, x_2)},$$

nous entendrons par son degré d'homogénéité ou seulement son degré m la différence des degrés de son numérateur et de son dénominateur. Soit donc t une variable arbitraire on aura

$$F(tx_1, tx_2) = t^m F(x_1, x_2)$$

et le nombre m est alors égal au nombre des zéros fixes de F diminué de celui des infinis fixes.

De cette définition du *degré* il résulte immédiatement que toutes les formes homogènes de degré zéro et celles-là seulement sont complètement indépendantes du paramètre u: elles n'ont donc *uniquement* que des zéros et des infinis fixes. La seconde partie de cette proposition est évidente; pour démontrer la première il suffit de faire $m = 0$ et $t = \frac{1}{x_2}$ dans l'équation précédente; on obtient alors

$$F\left(\frac{x_1}{x_2}, 1\right) = F(x, 1) = F(x_1, x_2),$$

ce qui montre de suite que toute forme homogène de degré zéro ne dépend que de x et aucunement de u et que l'on obtient son expression en x, en remplaçant x_1 par x et x_2 par l'unité.

Une autre conséquence de cette proposition est la suivante. On peut mettre dans une classe toutes les formes homogènes de même degré; les formes d'une même classe présentent alors cette propriété tout à fait caractéristique: à savoir que le quotient de deux d'entre elles est égal à une fonction de x *seul* indépendant du paramètre u et ne possède par suite ni zéros ni infinis variables.

En ce qui concerne cette »équivalence relative» des formes on peut remarquer ici en passant, que les propositions qui s'appliquent ici s'énoncent mot pour mot comme celles qui ont trait aux questions analogues dans la théorie supérieure des nombres, toutefois le nombre des classes des formes non équivalentes est évidemment dans ce cas infini puisque le degré d'une forme peut être égal à tout nombre positif ou négatif.

§ 2. *Des fonctions algébriques et des formes homogènes algébriques.*

Soit y une fonction algébrique de x, d'ordre n, y sera donné par une équation irréductible de degré n dont les coefficients rationnels (entiers ou fractionnaires) sont des fonctions de x. Si on divise cette équation par le coefficient de y^n on obtient une équation de la forme suivante:

$$(1) \qquad f(y, x) = y^n + A_1(x)y^{n-1} + A_2(x)y^{n-2} + \ldots + A_n(x) = 0$$

où les n coefficients $A_1(x), \ldots, A_n(x)$ sont des fonctions rationnelles de x. Faisons de suite la supposition que les coefficients sont déjà mis sous une forme réduite et que par conséquent pour aucun d'eux il n'y aura un diviseur commun au numérateur et au dénominateur.

A chaque valeur $(x = a)$ correspondent n valeurs $b_1, b_2, \ldots, b_n$ de y que l'on saura calculer avec une approximation donnée en se servant de l'équation

$$(1\text{ a}) \qquad f(y, a) = y^n + A_1(a)y^{n-1} + \ldots + A_n(a) = 0.$$

Ces valeurs ne seront toutes finies (a ayant par hypothèse une valeur finie) que dans le cas seul ou aucun des n coefficients $A_i(a)$ n'est infini, c'est à dire dans le cas seul ou le facteur linéaire $(x - a)$ ne figure au dénominateur d'aucune des fractions $A_1(x), \ldots, A_n(x)$. Pour $x = \infty$ au contraire les n valeurs de y n'auront une valeur finie que si cette valeur de x n'est un infini pour aucun de ces coefficients; que si, par conséquent, dans tous ces coefficients, le dénominateur se trouve être au moins de degré égal à celui du numérateur.

Considérons maintenant toutes les fonctions rationnelles z de x et y, où y se trouve lié à la variable indépendante x par l'équation (1). Celles-ci constituent alors un domaine dont les membres se reproduisent par les opérations élémentaires de calcul, puisque la somme et la différence, le produit et le quotient de telles fonctions reproduit une fonction de même espèce. L'ensemble de ces fonctions appartient d'après RIEMANN[1]

[1] *Théorie des fonctions abéliennes*, § 12.

à une seule et même *classe* de fonctions algébriques; elles constituent d'après KRONECKER »un genre de fonctions algébriques» que l'on peut caractériser par le symbole $G(y, x)$.

Considérons donc une quelconque des fonctions z de ce genre, on pourra toujours la mettre sous la forme

$$z = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}, \tag{2}$$

φ et ψ désignant des fonctions entières de x et y. Nous ferons dès le début une première hypothèse: c'est que le dénominateur de l'expression (2) n'est pas divisible par la fonction irréductible $f(y, x)$ sans que ce facteur se trouve également au numérateur; car alors z prendrait des valeurs infinies pour toute valeur de x. Dès lors on sait qu'on peut toujours mettre z d'une et d'une seule façon sous la forme d'une fonction entière de y de degré moindre que n à coefficients représentés par des fonctions rationnelles de x. Donc toutes les fonctions z du genre $G(y, x)$ et celles-là seulement pourront se mettre sous la forme

$$z = u_0 + u_1 y + \ldots + u_{n-1} y^{n-1}, \tag{2 a}$$

les coefficients $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ étant des fonctions rationnelles de la variable indépendante x.

Toute fonction z satisfait donc, tout comme y, à une équation algébrique de degré n,

$$z^n + \mathfrak{B}_1(x) z^{n-1} + \ldots + \mathfrak{B}_n(x) = 0 \tag{3}$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x mises sous forme réduite. Pour obtenir cette équation de la façon la plus simple on ramène les n produits

$$z, zy, \ldots, zy^{n-1}$$

à être de degré $(n - 1)$ en y au moyen de l'équation (1). Des n équations linéaires dont l'expression générale est

$$zy^{i-1} = \sum_{k=1}^{k=n} u_{ik} y^{k-1}, \qquad [i=1,2,\ldots,n] \tag{4}$$

où les n^2 coefficients u_{ik} sont des fonctions linéaires et homogènes de

$u_0, \ldots, u_{n-1}$, on déduit, en éliminant $1, y, \ldots, y^{n-1}$, l'équation cherchée sous forme de déterminant

$$(4\,a)\qquad \begin{vmatrix} (u_{11} - z) & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & (u_{22} - z) & \ldots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & (u_{nn} - z) \end{vmatrix} = 0.$$

La fonction algébrique z ne pourra devenir infinie pour une valeur finie $(x = a)$ de la variable indépendante que si le facteur linéaire correspondant $(x - a)$ figure dans le dénominateur commun des n fractions $\mathfrak{B}_1(x), \mathfrak{B}_2(x), \ldots, \mathfrak{B}_n(x)$. Soit $B_0(x)$ ce plus petit dénominateur commun, posons

$$\mathfrak{B}_i = \frac{B_i(x)}{B_0(x)},$$

on pourra écrire l'équation en z sous la forme

$$(5)\qquad B_0(x)z^n + B_1(x)z^{n-1} + \ldots + B_n(x) = 0,$$

et les zéros de $B_0(x)$ correspondront alors seuls à des infinis de z.

On peut maintenant, tout comme dans le chapitre précédent à propos des fonctions rationnelles, représenter les fonctions algébriques z par le quotient de deux autres fonctions, qui ne deviennent jamais infinies; le dénominateur s'annulera pour tous les infinis et le numérateur pour tous les zéros, tant que ceux-ci conserveront des valeurs finies. Si on pose

$$(6)\qquad z = \frac{z_1}{B_0(x)},$$

on voit immédiatement que la fonction entière $B_0(x)$ ne devient infinie pour aucune valeur finie de x.

Il en est de même du numérateur z_1, car si on remplace z par sa valeur (6) dans l'équation (5), on reconnaît que z_1 satisfait à l'équation

$$(7)\qquad z_1^n + B_1(x)z_1^{n-1} + B_0(x)B_2(x)z_1^{n-2} + \ldots + B_0(x)^{n-1}B_n(x) = 0$$

dont les coefficients sont des fonctions entières de x qui ne deviennent

jamais infinies pour des valeurs finies de la variable, ce qui démontre la proposition.

Il est au contraire impossible avec les moyens dont nous disposons ici de représenter la fonction algébrique z par le quotient de deux quantités qui restent toujours finies, dès que la variable indépendante peut prendre la valeur $(x = \infty)$, puisqu'alors le numérateur de la fraction (6) comme aussi son dénominateur devient infini. Mais si on emploie et généralise le mode de représentation des fonctions par des formes homogènes, mode exposé dans le chapitre précédent, on pourra également dans le cas actuel représenter avec facilité toute fonction algébrique par le quotient de deux formes, qui toutes deux restent finies pour des valeurs finies *et* infinies de la variable.

Dans ce but multiplions l'équation fondamentale (1) qui donne y, par le dénominateur commun de toutes les fonctions fractionnaires $A_1(x), \ldots, A_n(x)$, on obtient alors la nouvelle forme d'équation

$$\bar{A}_0(x)y^n + \bar{A}_1(x)y^{n-1} + \ldots + \bar{A}_n(x) = 0,$$

où $\bar{A}_0(x), \ldots, \bar{A}_n(x)$ représentent des fonctions entières de x sans diviseur commun dont le degré en x soit au plus égal à m. Remplaçons maintenant dans celles-ci x par le quotient des formes $\frac{x_1}{x_2}$ et chassons le dénominateur x_2^m qui s'introduit par cette substitution, en multipliant tous les termes par celui-ci; l'équation précédente se transforme alors en la suivante:

$$(7) \qquad A_0(x_1, x_2)y^n + A_1(x_1, x_2)y^{n-1} + \ldots + A_n(x_1, x_2) = 0,$$

où maintenant les coefficients $A_i(x_1, x_2)$ représentent des formes homogènes de (x_1, x_2) et de degré m.

Il en résulte immédiatement que y ne peut devenir infini que pour les zéros *fixes* de $A_0(x_1, x_2)$, parce que les autres coefficients ont tous leurs infinis variables avec le paramètre u et par suite dépendent de celui-ci et que y lui-même est complètement indépendant de u.

Grâce à cette forme de l'équation (1), s'offre maintenant à nous une représentation de la variable y comme quotient de deux formes toujours

finies, qui sera d'une importance capitale dans les considérations qui vont suivre. Posons en effet:

$$(8) \qquad y = \frac{\eta}{A_0(x_1, x_2)};$$

il résulte de l'équation (7) que η satisfait à l'équation algébrique suivante

$$0 = \eta^n + A_1(x_1, x_2)\eta^{n-1} + A_2(x_1, x_2)A_0(x_1, x_2)\eta^{n-2} + \dots$$
$$+ A_n(x_1, x_2)A_0^{n-1}(x_1, x_2)$$

ou plus simplement

$$(9) \qquad \eta^n + \mathfrak{A}_1(x_1, x_2)\eta^{n-1} + \mathfrak{A}_2(x_1, x_2)\eta^{n-2} + \dots + \mathfrak{A}_n(x_1, x_2) = 0,$$

où maintenant les n coefficients

$$\mathfrak{A}_1(x_1, x_2), \ \mathfrak{A}_2(x_1, x_2), \ \dots, \ \mathfrak{A}_n(x_1, x_2)$$

sont des formes entières et homogènes de (x_1, x_2) et de degré

$$m, \ 2m, \ \dots, \ nm.$$

Il en résulte que η ne possède aucun infini fixe, car les infinis des coefficients $\mathfrak{A}_i(x_1, x_2)$ dépendent tous de u. On voit de même que le dénominateur de la fraction (8) ne possède aucun infini fixe; y ne dépendant aucunement de u, il s'en suit que cette fonction ne peut ni s'annuler ni devenir infinie soit pour les zéros variables du quotient $\frac{\eta}{A_0}$ soit pour ses infinis variables.

On voit donc que ce sont les zéros et les infinis *fixes* seuls de cette forme qui correspondent à des zéros et infinis de la fonction algébrique y, et comme enfin dans ce quotient il n'existe aucun infini fixe soit pour le numérateur, soit pour le dénominateur, il s'en suit que les zéros de y correspondent seulement aux zéros du numérateur η, et ses infinis aux zéros fixes du dénominateur $A_0(x_1, x_2)$.

Il est maintenant aisé de représenter toute fonction rationnelle $f(x, y)$ de x et y, ou toute quantité du genre $G(y, x)$, par le quotient de

deux formes n'ayant chacune que des zéros fixes sans posséder aucun infini fixe. Posons en effet:

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \qquad y = \frac{\eta}{A_0(x_1, x_2)};$$

$f(x, y)$ se transforme en

$$f(x, y) = f\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{\eta}{A_0(x_1, x_2)}\right) = F(x_1, x_2, \eta),$$

$F(x_1, x_2, \eta)$ étant une fonction rationnelle des trois variables qui se trouve aussi en quelque sorte être homogène, car elle reste invariable quand on y remplace

$$(x_1, x_2, \eta) \quad \text{par} \quad (tx_1, tx_2, t^m\eta).$$

On a donc

$$(10) \qquad F(tx_1, tx_2, t^m\eta) = F(x_1, x_2, \eta).$$

Car tandis que x_1, x_2, η prennent ainsi des formes différentes, les quotients $x = \frac{x_1}{x_2}$, $y = \frac{\eta}{A_0(x_1, x_2)}$ ne changent pas quand on effectue cette substitution. Inversement on reconnait que toute fonction rationnelle $F(x_1, x_2, \eta)$ qui satisfait à l'équation (10) pour une variable t, est nécessairement égale à une fonction rationnelle de x et y et par conséquent est indépendante du paramètre u. Car si on remplace la variable t par $\frac{1}{x_2}$ l'équation (10) devient

$$F(x_1, x_2, \eta) = F\left(\frac{x_1}{x_2}, 1, \frac{\eta}{x_2^m}\right) = F(x, 1, yA_0(x, 1)),$$

ce qui démontre la proposition.

Or toute fonction rationnelle de (x_1, x_2, η) peut se mettre sous la forme du quotient de deux fonctions entières, à savoir:

$$F(x_1, x_2, \eta) = \frac{f(x_1, x_2, \eta)}{g(x_1, x_2, \eta)}.$$

Si on veut que ce quotient soit indépendant du paramètre u, si on veut par suite que pour une variable t l'identité suivante ait lieu, à savoir:

$$\frac{f(tx_1, tx_2, t^m\eta)}{g(tx_1, tx_2, t^m\eta)} = \frac{f(x_1, x_2, \eta)}{g(x_1, x_2, \eta)}$$

il faudra, à une même puissance de t près, que numérateur et dénominateur restent chacun invariable quand on y effectue cette substitution; ces deux fonctions devront donc satisfaire à l'équation

$$(11) \qquad \begin{cases} f(tx_1, tx_2, t^m\eta) = t^\mu f(x_1, x_2, \eta), \\ g(tx_1, tx_2, t^m\eta) = t^\mu g(x_1, x_2, \eta), \end{cases}$$

μ étant un nombre arbitraire, entier et positif. En effet si f et g satisfont à ces conditions leur quotient sera indépendant de t et par suite du paramètre u. Si cette condition n'est pas remplie, on peut évidemment réunir dans f comme dans g tous les produits de la forme $x_1^\alpha x_2^\beta \eta^\gamma$ en un seul et même terme, qui après cette substitution de $tx_1, tx_2, t^m\eta$, à x_1, x_2, η contiennent la même puissance de t en facteur. Soit donc

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1 + f_2 + \ldots + f_h}{g_1 + g_2 + \ldots + g_k}$$

on obtiendra pour ce quotient, la substitution étant effectuée, une expression de la forme

$$\frac{t^{\mu_1}f_1 + t^{\mu_2}f_2 + \ldots + t^{\mu_h}f_h}{t^{\nu_1}g_1 + t^{\nu_2}g_2 + \ldots + t^{\nu_k}g_k}$$

qui ne peut être indépendante de la variable t que dans le cas seul où celle-ci disparait entièrement du quotient, c'est à dire si

$$h = k = 1, \qquad \mu_1 = \nu_1 = \mu,$$

et cette condition revient à celle exprimée par les équations (11).

Une fonction rationnelle $F(x_1, x_2, \eta)$ qui jouit de la propriété suivante: à savoir que l'on a identiquement

$$F(tx_1, tx_2, t^m\eta) = t^\mu F(x_1, x_2, \eta),$$

s'appellera une *fonction homogène* de ces trois quantités et le nombre entier μ (qui peut être positif, nul ou négatif) portera le nom de degré d'homogénéité ou seulement de degré de $F(x_1, x_2, \eta)$. La proposition exprimée par l'équation (10) pourra dès lors s'énoncer plus simplement comme il suit:

Une fonction rationnelle $F(x_1, x_2, \eta)$ n'est égale à une fonction rationnelle de x et y (et par suite n'est indépendante du para-

mètre u) que dans le cas seul où elle est une fonction homogène de degré o.

La proposition qu'on vient de trouver prend alors la forme suivante:

Toute fonction rationnelle de x et y peut se mettre sous la forme du quotient de deux fonctions entières et homogènes de (x_1, x_2, η) de même degré, et inversement tout quotient de cette espèce est égal à une fonction de x et y.

Soit donc maintenant une fonction arbitraire représentée de cette façon par le quotient

$$F(x, y) = \frac{f(x_1, x_2, \eta)}{g(x_1, x_2, \eta)},$$

le numérateur et le dénominateur étant des fonctions *entières* et homogènes de (x_1, x_2, η), on reconnaît de nouveau que les zéros et les infinis variables du numérateur et du dénominateur, c'est à dire ceux qui dépendent du paramètre u, ne peuvent être en aucune façon des valeurs singulières de $F(x, y)$, puisque cette fonction ne contient aucunement ce paramètre. Les valeurs singulières de F ne peuvent donc se présenter que pour les zéros et infinis *fixes* de f et g. Les fonctions *entières* $f(x_1, x_2, \eta)$ et $g(x_1, x_2, \eta)$ ne possèdent aucun infini fixe mais seulement des zéros fixes, puisque x_1, x_2, η n'ont eux-mêmes que de telles valeurs singulières. Donc les zéros de $F(x, y)$ se trouvent seulement parmi les zéros fixes du numérateur $f(x_1, x_2, \eta)$, et les infinis de $F(x, y)$ seulement parmi les zéros *fixes* du dénominateur $g(x_1, x_2, \eta)$. Toute fonction $F(x, y)$ est maintenant mise sous la forme d'un quotient de deux fonctions qui ne deviennent jamais infinies indépendamment du paramètre u. Comme enfin on peut représenter toute fonction du genre $G(y, x)$ par le quotient de deux fonctions de x_1, x_2, η entières et homogènes, nous sommes conduits dans la suite à n'étudier que des fonctions *entières et homogènes* de x_1, x_2, η; et comme ce sont leurs zéros *fixes* qui interviennent seuls dans ce mode de représentation nous ne considérerons que ceux-là, sans nous occuper des valeurs singulières variables avec le paramètre u.

De même que pour les formes en (x_1, x_2) on pourra aussi ranger en classes les fonctions homogènes de (x_1, x_2, η) selon leur degré μ. Les fonctions de degré o se distinguent des autres en ce que seules elles sont égales à des fonctions rationnelles du genre $G(y, x)$; elles sont par suite

indépendantes du paramètre u. C'est donc à bon droit que nous désignerons cette classe de fonctions homogènes par »classe principale».

Nous tirons de suite comme conséquence immédiate du second théorème qui vient d'être énoncé la conclusion suivante: le quotient de deux fonctions $F(x_1, x_2, \eta)$, $G(x_1, x_2, \eta)$ de même classe est égal à une fonction de la »classe principale» ou à une fonction du genre $G(y, x)$; ou ce qui revient au même: deux fonctions d'une même classe sont toujours proportionnelles à deux fonctions rationnelles de (x, y). Nous pouvons encore dans ce cas, poursuivant plus loin l'analogie avec les définitions correspondantes de la théorie des nombres, considérer deux fonctions de la même classe comme »relativement équivalentes». En particulier toute fonction homogène de (x_1, x_2, η) est équivalente à une fonction homogène de (x_1, x_2), par exemple à x_2^{μ}, l'exposant μ étant égal à son degré.

§ 3. *Des formes homogènes entières et de leur représentation par un système fondamental.*

Il résulte des propositions énoncées dans le chapitre précédent qu'au lieu de considérer les fonctions du genre $G(y, x)$ elles-mêmes, il suffit d'étudier les fonctions de (x_1, x_2, η) rationnelles et homogènes en supposant que η satisfait à l'équation irréductible (9) trouvée au chapitre précédent, à savoir:

$$(1) \qquad \eta^n + \mathfrak{A}_1(x_1, x_2)\eta^{n-1} + \ldots + \mathfrak{A}_n(x_1, x_2) = 0,$$

et nous n'aurons besoin de considérer ici que les valeurs singulières fixes, c'est-à-dire indépendantes de u. Ces fonctions constituent aussi à elles seules une suite indéfinie, un genre, dont les divers membres, avec une modification naturelle que l'on va indiquer, se reproduisent par les opérations de calcul élémentaires: addition, soustraction, multiplication, division. Si on suppose en effet que η_1 et η_2 soient deux fonctions homogènes arbitraires de (x_1, x_2, η), μ_1 et μ_2 étant leurs degrés respectifs, on voit que $\eta_1\eta_2$ et $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ sont également des fonctions homogènes de degré $\mu_1 + \mu_2$ et $\mu_1 - \mu_2$. On généraliserait cette propriété pour le produit

d'un nombre quelconque de fonctions η. Au contraire la somme et la différence de η_1 et η_2 ne seront homogènes que dans le cas particulier seul où ces fonctions sont de même degré, où par conséquent elles appartiennent à une même classe. C'est pour cette raison que dans ce qui va suivre nous n'effectuerons l'addition que pour les fonctions de même classe. Puisque, sous cette restriction, les fonctions rationnelles de (x_1, x_2, η) forment un ensemble fermé, il convient d'appeler cet ensemble un genre. Nous la désignerons par le symbole $G(x_1, x_2, \eta)$.

Les considérations suivantes coïncident au fond avec celles qu'on a exposées au commencement du chapitre précédent, aussi suffit-il de n'indiquer ici que les résultats correspondants.

Chaque fonction w du genre $G(x_1, x_2, \eta)$ peut se mettre d'une et d'une seule façon sous la forme d'une fonction de degré $(n - 1)$ de η, à savoir:

$$w = u_0 + u_1\eta + \dots + u_{n-1}\eta^{n-1}, \tag{2}$$

$u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ représentant des fonctions rationnelles de (x_1, x_2) seulement, fonctions entières ou fractionnaires. Car à cause de l'irréductibilité de l'équation en y, irréductibilité qu'on a supposée exister, et qui entraîne aussi celle de l'équation en η, une équation

$$u_0 + u_1\eta + \dots + u_{n-1}\eta^{n-1} = 0 \tag{2 a}$$

ne saurait exister que si tous les n coefficients $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ sont simultanément nuls. Nous désignerons pour cette raison les n fonctions

$$1, \eta, \eta^2, \dots, \eta^{n-1} \tag{2 b}$$

comme un système de fonctions linéairement indépendantes du genre $G(x_1, x_2, \eta)$, car elles ne sauraient être reliées par aucune équation linéaire (2 a).

Il est clair qu'on peut trouver une infinité de pareils systèmes de n fonctions linéairement indépendantes. Soient en effet

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n. \tag{2 c}$$

n fonctions homogènes du genre G, si on les exprime séparément au moyen des fonctions (2 a) on obtient les équations suivantes au nombre de n

$$\text{(2 d)}\qquad \begin{cases} \eta_1 = u_{10} + u_{11}\eta + \ldots + u_{1\,n-1}\eta^{n-1}, \\ \eta_2 = u_{20} + u_{21}\eta + \ldots + u_{2\,n-1}\eta^{n-1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \eta_n = u_{n0} + u_{n1}\eta + \ldots + u_{n\,n-1}\eta^{n-1}, \end{cases}$$

où les coefficients u_{ik} sont des fonctions homogènes de (x_1, x_2). Si le déterminant de la substitution, à savoir:

$$|u_{ik}| \qquad \binom{i=1,2,\ldots,n}{k=0,1,\ldots,n-1}$$

est différent de zéro, on pourra exprimer les valeurs $(1, \eta, \ldots, \eta^{n-1})$ en fonction du système $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$; ces dernières fonctions sont donc linéairement indépendantes. Si ce même déterminant est nul, on sait qu'on pourra trouver n fonctions $u_1(x_1, x_2), \ldots, u_n(x_1, x_2)$ non toutes nulles, telles que l'équation

$$u_1\eta_1 + \ldots + u_n\eta_n = 0,$$

soit satisfaite identiquement, parce que tous les coefficients de $1, \eta, \ldots, \eta^{n-1}$ s'annulent quand on y remplace $\eta_1, \ldots, \eta_n$ par leur valeur donnée par (2 d). Dans ce cas les n fonctions $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ ne sont pas linéairement indépendantes.

Soit μ le degré de w dans (2), le degré de chacun des n produits $u_i\eta^i$ est égal à μ. Comme m est le degré de η et par suite mi celui de η^i, on trouve que le degré λ_i de u_i est égal à $\mu - mi$.

Si en particulier w est une fonction *entière* et rationnelle de (x_1, x_2, η), $u_0, u_1, \ldots, u_n$ sont aussi des fonctions *entières* et homogènes de (x_1, x_2) et comme leur degré est toujours un nombre entier positif, tous les coefficients u_i pour lesquels le nombre $(\mu - mi)$ serait négatif devront dans ce cas manquer dans la représentation (2).

Toute fonction w du genre $G(x_1, x_2, \eta)$ satisfait à une équation de degré n

$$\text{(3)}\qquad F(w) = w^n + B_1(x_1, x_2)w^{n-1} + \ldots + B_n(x_1, x_2) = 0$$

dont les coefficients dépendent de (x_1, x_2).

Ici encore, il est très facile de former cette équation par l'élimination de η entre les n équations

$$\text{(3 a)}\qquad w\eta^{i-1} = \Sigma u_{ik}\eta^{k-1} \qquad (i=1,\ldots,n)$$

que l'on obtient en réduisant au degré $(n-1)$ en η les n produits $w\eta^{i-1}$ en se servant de l'équation (1). L'éliminant peut s'écrire alors sous la forme du déterminant suivant

$$(3\text{ b})\qquad \begin{vmatrix} (u_{11}-w) & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & (u_{22}-w) & \ldots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & (u_{nn}-w) \end{vmatrix} = 0.$$

Il convient de remarquer que l'équation qu'on vient de former n'est pas nécessairement l'équation de moindre degré à laquelle satisfasse w. Dans la suite nous indiquerons un moyen qui pour chaque valeur w permettra de trouver facilement l'équation de moindre degré

$$(4)\qquad \varphi(w) = w^e + B_1(x_1, x_2)w^{e-1} + \ldots + B_e(x_1, x_2) = 0,$$

à laquelle elle satisfait et qui par suite n'est plus réductible. On démontre alors par des théorèmes connus que si w satisfait à une autre équation $\varphi_1(w) = 0$, $\varphi_1(w)$ est nécessairement divisible par la fonction irréductible $\varphi(w)$. En particulier la fonction (3) que nous avons trouvée précédemment est toujours divisible par $\varphi(w)$.

Soit μ le degré de la fonction homogène w, w et la puissance x_2^μ appartiennent alors à une même classe, et le quotient

$$z = \frac{w}{x_2^\mu}$$

est par conséquent complètement indépendant du paramètre u. Remplaçons w dans(4) par zx_2^μ, z satisfera alors à l'équation

$$0 = z^e + \frac{B_1(x_1, x_2)}{x_2^\mu} z^{e-1} + \frac{B_2(x_1, x_2)}{x_2^{2\mu}} z^{e-2} + \ldots + \frac{B_e(x_1, x_2)}{x_2^{e\mu}};$$

il en résulte que les coefficients de cette équation sont également indépendants de u.

Remarquons que cette expression ne saurait se décomposer en plusieurs autres de degré différent, car chacune devrait alors être séparément nulle, il s'en suivrait que z, et par conséquent aussi w, satisferait à une

équation de degré inférieur à e, ce qui est contraire à l'hypothèse précédente.

Donc chacun de ces coefficients est une fonction homogène (entière ou fractionnaire) de x_1, x_2 et les degrés de

$$B_1(x_1, x_2),\ B_2(x_1, x_2),\ \ldots,\ B_e(x_1, x_2)$$

sont respectivement

$$\mu,\ 2\mu,\ \ldots,\ e\mu,$$

μ étant le degré de w. Nous considérerons dès le début tous ces coefficients sous leur forme réduite, nous supposerons donc que les facteurs linéaires de la forme $(\alpha' x_1 - \alpha'' x_2)$ qui pourraient se trouver communs au numérateur et au dénominateur ont été supprimés préalablement.

L'équation (4) définit w comme une fonction algébrique et bien déterminée de x, pour toute valeur fixe du paramètre u; ou, ce qui en revient au même, cette équation représente pour toute valeur de u une courbe algébrique bien déterminée. A une valeur $x = a$ correspondent des valeurs de w finies, ou des points de la courbe à distance finie, dans le cas et dans le cas seul où aucun des e coefficients $B_i(x_1, x_2)$ ne devient infini pour cette valeur de x. Nous appellerons au contraire cette valeur $(x = a)$ un infini de w, si au moins un de ces coefficients et par suite aussi au moins une des e valeurs correspondantes de w devient infinie pour cette valeur.

Si on laisse u prendre toutes les valeurs possibles, w représente un faisceau de fonctions algébriques, l'équation (4) en w détermine donc un faisceau de courbes algébriques.

Nous appellerons la valeur $(x = a)$ un infini *fixe* de w dans le cas où pour *chaque* valeur de u elle est un infini de w, dans le cas, par conséquent, où toutes les courbes du faisceau ont en cet endroit au moins un point fixe à distance infinie. La valeur $x = a$, ou, comme nous pouvons encore écrire, la valeur

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\alpha''}{\alpha'} = a$$

est un tel infini fixe et ne l'est que dans le cas seul où le facteur li-

néaire $(\alpha' x_1 - \alpha'' x_2)$ correspondant à cette valeur, se trouve en dénominateur dans au moins un des coefficients $B_i(x_1, x_2)$. Si ce n'est pas là le cas, on peut toujours choisir le paramètre u d'une infinité de manières de façon que les valeurs correspondantes de w se trouvent toutes être finies.

Une importance toute particulière doit être attachée aux fonctions w, qui, quelle que soit la valeur de x correspondante, ne possèdent aucun infini *fixe,* qui correspondent par conséquent à un faisceau de courbes n'ayant aucun point *commun* situé à l'infini. Celles-ci sont évidemment caractérisées en ce que les e coefficients $B_i(x_1, x_2)$ qui figurent dans l'équation (4) n'ont aucun dénominateur, qu'elles sont par suite des fonctions *entières* et homogènes de x_1, x_2. Une telle fonction w doitêtre appelée une fonction *algébrique entière* ou une fonction *entière* du genre $G(x_1, x_2, \eta)$.

De cette définition des fonctions algébriques et entières on déduit immédiatement une suite de propriétés qui leur appartiennent. Il résulte d'abord que l'hypothèse que nous avons faite ici à savoir que w est une fonction algébrique entière peut être remplacée par une bien plus générale. Si w satisfait en effet à n'importe quelle équation, irréductible ou non, $\psi(w) = 0$ dont les coefficients sont des fonctions entières de x_1, x_2, w est également entier et algébrique. Car soit $\varphi(w) = 0$ l'équation de moindre degré qui détermine w, $\varphi(w)$ sera un diviseur de $\psi(w)$, on aura donc

$$\psi(w) = \varphi(w)\theta(w)$$

et on démontre aisément que $\varphi(w)$ a comme coefficients des fonctions entières de x_1, x_2, si tel est le cas pour $\psi(w)$. En particulier w est toujours algébriquement entier lorsque l'équation (3) de degré n a ses coefficients entiers.

Une fonction homogène w a aussi le caractère d'être algébriquement entière quand on peut déterminer d'une infinité de façons le paramètre u de manière que toutes les quantités conjuguées à w possèdent des valeurs finies pour une valeur arbitraire $x = a$ donnée à l'avance.

Considérons maintenant deux fonctions w_1 et w_2 algébriques et entières et déterminons le paramètre u de façon que les quantités conjuguées à w_1 *et* à w_2 soient finies pour cette valeur $x = a$, il en sera alors de même pour leur somme $w_1 + w_2$ et leur produit $w_1 w_2$, et comme cette

propriété peut être étendue à un nombre quelconque de grandeurs algébriques et entières, on peut énoncer le théorème suivant:

La somme et le produit d'un nombre quelconque de fonctions algébriques et entières est aussi une fonction algébriquement entière.

Il s'en suit immédiatement que tout polynome en η dont les coefficients sont des formes de x_1, x_2 entières et homogènes est également algébriquement entière, et comme une telle fonction de η peut toujours se ramener au degré $(n - 1)$, on peut énoncer le théorème suivant:

Toute quantité w du genre $G(x_1, x_2, \eta)$ est algébriquement entière, quand, en la mettant sous la forme

$$(5) \qquad w = u_0 + u_1\eta + \ldots + u_{n-1}\eta^{n-1}$$

les formes homogènes $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ sont toutes des fonctions entières.

Les n quantités $(1, \eta, \ldots, \eta^{n-1})$ forment donc aussi un système de n fonctions *entières* et linéairement indépendantes du genre $G(x_1, x_2, \eta)$. On peut évidemment trouver une infinité de systèmes de fonctions linéaires, indépendantes, *entières* et algébriques. Soit en effet $\eta_1, \ldots, \eta_n$, n fonctions algébriquement entières et soit en général:

$$\eta_i = u_{i0} + u_{i1}\eta + \ldots + u_{i,n-1}\eta^{n-1}, \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

on démontre exactement de la même manière que précédemment que ces fonctions sont indépendantes dans le cas seul où le déterminant de la substitution

$$| u_{ik} |$$

n'est pas identiquement nul. Une importance toute particulière s'attache ici au degré total d'un pareil système $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ de quantités entières indépendantes, je veux dire à la somme des degrés des n fonctions $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$. Celle-ci se trouve évidemment être, pour le système $1, \eta, \ldots, \eta^{n-1}$

$$0 + m + 2m + \ldots + (n - 1)m = m\frac{n(n-1)}{2}.$$

Comme le degré d'une fonction entière et homogène ne peut jamais être un nombre entier négatif, il en est de même également du degré total d'un système de fonctions indépendantes et entières.

Toute quantité du genre peut être mise sous la forme (5), cependant les coefficients $u_0, \dots, u_{n-1}$ seront en général des formes de (x_1, x_2) *fractionnaires* et homogènes. Si on réduit tous ces coefficients au même dénominateur, chaque forme homogène de ce genre, qu'elle soit algébriquement entière ou non, se présente sous la forme

$$w = \frac{u_0 + u_1\eta + \dots + u_{n-1}\eta^{n-1}}{N(x_1, x_2)}, \tag{6}$$

les coefficients $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ et le dénominateur $N(x_1, x_2)$ étant des formes de (x_1, x_2) seulement, entières et homogènes. On peut même dès le début supposer que ces $(n + 1)$ formes de (x_1, x_2) n'ont plus aucun facteur linéaire commun puisqu'on pourra toujours commencer par déterminer celui-ci et par le supprimer. Donc, puisque dans ce mode de représentation de w sous forme de fraction, ni dénominateur ni numérateur ne possède un infini fixe, il s'en suit que, dans cette représentation des quantités w du genre $G(x_1, x_2, \eta)$, de même que précédemment dans celle des fonctions de (x_1, x_2) seulement, les zéros fixes de w doivent tous se trouver parmi les zéros fixes du numérateur et les infinis parmi les zéros du dénominateur.

Par contre la représentation des quantités w du genre $G(x_1, x_2, \eta)$ sous la forme (6) est encore très défectueuse en ce que la fraction qui y figure n'est pas réduite de façon que son numérateur s'annule *seulement* pour les zéros de w et son dénominateur *seulement* pour les infinis de cette même fonction. Par les considérations suivantes je veux montrer, comment on peut lever cet inconvenient.

On peut considérer d'abord le cas où un des facteurs linéaires du dénominateur, soit:

$$\xi_1 = \alpha' x_1 - \alpha'' x_2,$$

se trouve contenu dans le numérateur bien qu'il ne soit pas en facteur dans les n coefficients $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$, c'est à dire, que le quotient

$$\bar{\eta} = \frac{u_0 + u_1\eta + \dots + u_{n-1}\eta^{n-1}}{\xi_1} \tag{6 a}$$

soit algébriquement entier, sans que le facteur linéaire ξ_1 au dénominateur puisse s'enlever directement.

Si tel est le cas, nous prouverons tout de suite par une considération facile qu'alors le système $(1, \eta, \dots, \eta^{n-1})$ peut être remplacé par un autre système de fonctions entières et algébriques, dont le degré total est inférieur d'une unité à celui du premier système; on peut abaisser de nouveau le degré de ce second système, dans le cas où une quantité algébriquement entière ne peut être représentée par ce nouveau système que sous forme fractionnaire et ainsi de suite. Le degré total d'un tel système ne pouvant jamais être négatif, on doit nécessairement finir par arriver à un système

$$(7) \qquad \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$$

de n quantités linéairement indépendantes, entières et algébriques, qui peuvent servir à représenter toutes les fonctions algébriquement entières par des formes linéaires et homogènes, n'ayant aucun dénominateur $N(x_1, x_2)$, c'est à dire dont les coefficients sont des fonctions entières de (x_1, x_2).

Un tel système (7) sera appelé un système fondamental du genre $G(x_1, x_2, \eta)$ et on peut maintenant énoncer comme il suit sa propriété caractéristique:

> Soit $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ un système fondamental d'un genre $G(x_1, x_2, \eta)$, toutes les fonctions algébriquement entières de celui-ci et celles-là seulement sont comprises dans la forme
>
> $$u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + \dots + u_n\xi_n,$$
>
> $u_1, u_2, \dots, u_n$ étant des formes *entières* et homogènes de x_1, x_2.

La remarque suivante démontre l'existence réelle d'un pareil système fondamental pour tout genre $G(x_1, x_2, \eta)$. Si le système $(1, \eta, \dots, \eta^{n-1})$ n'est pas un système fondamental, il existe au moins une fonction homogène

$$(8) \qquad \eta_0 = \frac{u_0(x_1, x_2) + u_1(x_1, x_2)\eta + \dots + u_{n-1}(x_1, x_2)\eta^{n-1}}{\xi_1}$$

qui est algébriquement entière, bien que le facteur linéaire ξ_1 ne soit pas contenu dans tous les n coefficients $u_i(x_1, x_2)$ du numérateur.

Soit ξ_2 un facteur linéaire quelconque qui ne soit pas équivalent à ξ_1, soit donc

$$\xi_1 = \alpha' x_1 - \alpha'' x_2,$$

$$\xi_2 = \beta' x_1 - \beta'' x_2,$$

où les zéros $\frac{\alpha''}{\alpha'}$ et $\frac{\beta''}{\beta'}$ de ξ_1 et ξ_2 ne coïncident pas, on peut remplacer x_1 et x_2 par leur valeur en ξ_1, ξ_2 dans les coefficients $u_i(x_1, x_2)$; η_0 deviendra dans ce cas

(8 a) $$\eta_0 = \frac{\bar{u}_0(\xi_1, \xi_2) + \bar{u}_1(\xi_1, \xi_2)\eta + \dots + \bar{u}_{n-1}(\xi_1, \xi_2)\eta^{n-1}}{\xi_1}.$$

Si maintenant dans chacune des n formes homogènes $\bar{u}_i(\xi_1, \xi_2)$ de degré λ_i on sépare des autres le terme indépendant de ξ_1, on pourra écrire le coefficient $\bar{u}_i(\xi_1, \xi_2)$ comme il suit

$$\bar{u}_i(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 u_i'(\xi_1, \xi_2) + v_i \xi_2^{\lambda_i},$$

$v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ étant des constantes.

Posons pour abréger

$$\eta_0' = u_0'(\xi_1, \xi_2) + u_1'(\xi_1, \xi_2)\eta + \dots + u_{n-1}'(\xi_1, \xi_2)\eta^{n-1},$$

(9) $$\eta_0'' = \frac{v_0\xi_2^{\lambda_0} + v_1\xi_2^{\lambda_1}\eta + \dots + v_{n-1}\xi_2^{\lambda_{n-1}}\eta^{n-1}}{\xi_1}.$$

on obtient pour η_0 la forme suivante:

$$\eta_0 = \eta_0' + \eta_0''$$

ou bien

$$\eta_0'' = \eta_0 - \eta_0',$$

et comme évidemment η_0' est algébriquement entier, il résulte de la dernière équation que la quantité η_0'' trouvée précédemment doit aussi être algébriquement entière.

De ce fait que η_0 et par suite aussi η_0'' est homogène, il résulte que les degrés des produits respectifs $(\xi_2^{\lambda_i}\eta_i)$ du numérateur ont même degré et que par suite chacun des exposants entiers $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ est plus petit que le précédent. Soit donc v_h la dernière constante du numérateur

de η_0'' qui soit différente de zéro, on pourra écrire cette fonction sous la forme:

$$\eta_0'' = \xi_2^{\lambda_h} \cdot \frac{v_0 \xi^{\lambda_0 - \lambda_h} + v_1 \xi^{\lambda_1 - \lambda_h} \eta + \ldots + v_h \eta^h}{\xi_1}$$
$$= \xi_2^{\lambda_h} \eta_h,$$

et il résulte des deux équations relatives à la nouvelle quantité η_h qu'on vient d'introduire, à savoir

$$\eta_h = \frac{\eta_0''}{\xi_2^{\lambda_h}} = \frac{v_0 \xi_2^{\lambda_0 - \lambda_h} + \ldots + v_h \eta^h}{\xi_1},$$

que η_h est aussi algébriquement entier, parce que d'après la première expression η_h ne possède aucun infini fixe pour le zéro de ξ_1 et d'après la seconde il n'en a pas pour le zéro de ξ_2; et parce qu'il ne peut en aucune façon posséder d'autres infinis. Si on remplace maintenant le système primitif

(10) $$1, \eta, \ldots, \eta^h, \ldots, \eta^{n-1},$$

par le nouveau

(10 a) $$1, \eta, \ldots, \eta_h, \ldots, \eta^{n-1}$$

dans lequel le seul élément nouveau η_h dépend de ceux du système (10) par l'équation

(11) $$\eta_h = \frac{v_0 \xi_2^{\lambda_0 - \lambda_h}}{\xi_1} + \frac{v_1 \xi_2^{\lambda_1 - \lambda_h}}{\xi_1} \eta + \ldots + \frac{v_h}{\xi_1} \eta^h,$$

on reconnaît que (10 a) est également un système de quantités entières algébriques *linéairement indépendantes,* parce qu'on voit immédiatement que les éléments du premier système (10) peuvent s'exprimer au moyen de ceux du second; on voit aussi d'après (11) que le degré total du second système est inférieur d'une unité à celui du premier, car le degré de la seule fonction nouvelle η_h qui y figure est égal non pas à celui de η^h mais à celui de $\frac{\eta^h}{\xi_1}$.

Si ce second système $(1, \eta, \ldots, \eta_h, \ldots, \eta^{n-1})$ n'est encore pas un système fondamental, on montrerait exactement comme on vient de le

faire, qu'on peut remplacer de nouveau ce système par un autre de degré encore moindre, et en continuant ainsi on arrive nécessairement à un système fondamental $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Il est cependant bon de faire remarquer ici que par la méthode simple indiquée, on a seulement établi *l'existence* d'un pareil système fondamental, mais qu'on n'a pas pour autant indiqué un moyen pour le trouver même dans les cas les plus simples, et c'est précisement ce dernier point qui, dans toutes les applications de la théorie, se trouve être d'une importance capitale. On pourrait, il est vrai, en ne cherchant que la clareté et le côté purement abstrait et philosophique, se contenter de l'aperçu qu'on vient de donner pour en faire, sans grande peine, le fondement d'une théorie complète des fonctions algébriques, ou, ce qui en revient au même, des courbes algébriques. Cette théorie cependant aurait le très grave inconvénient de ne pouvoir à elle seule servir à déterminer en aucune façon les propriétés de n'importe quelle classe déterminée de courbes algébriques. C'est pourquoi je veux démontrer dans la suite, qu'on peut, en partant d'un système donné arbitrairement de n fonctions indépendantes algébriques et entières (par exemple en partant du système considéré précédemment $1, \eta, \ldots, \eta^{n-1}$) arriver toujours par la résolution seule d'un certain nombre d'équations linéaires à un système fondamental.

Par les considérations que nous venons d'exposer nous avons résolu une question dont on verra l'importance dans la suite. Soit en effet $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ un système de n fonctions indépendantes entières et algébriques, supposons qu'on connaisse une fonction entière $\bar{\eta}$ qui, exprimée au moyen de ce système, se présente sous la forme fractionnaire suivante

$$\bar{\eta} = \frac{u_1(x_1, x_2)\eta_1 + \ldots + u_n(x_1, x_2)\eta_n}{\xi_1},$$

sans que le facteur linéaire ξ_1 en dénominateur soit contenu dans tous les coefficients $u_i(x_1, x_2)$ du numérateur, dans ce cas $\bar{\eta}$ et $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ donnent lieu à un nouveau système de n fonctions $(\eta'_1, \ldots, \eta'_n)$ indépendantes et entières dont le degré total est inférieur d'une unité à celui du système précédent et qu'on peut déterminer par la méthode exposée plus haut. On reconnait en passant, sans en dire plus long, que ce nouveau système permet de représenter $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ aussi bien que $\bar{\eta}$ sans

dénominateur. Toute la tâche qui nous reste encore à faire consiste donc à trouver toutes les fonctions algébriques et entières $\bar{\eta}$ qui, exprimées au moyen d'un système $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, se présentent sous forme fractionnaire.

§ 4. *Des propriétés principales du système fondamental.*

Avant de passer à la formation d'un système fondamental nous allons mettre en lumière quelques-unes de ses propriétés pour montrer quelle étroite parenté existe entre le système fondamental et le genre $G(x_1, x_2, \eta)$ déjà étudié.

Pour faciliter la lecture nous désignerons dans tout ce qui suit par le symbole $[\eta]$ le degré d'une fonction homogène η de x_1, x_2, η. On a alors les équations

$$[\eta'\eta''] = [\eta'] + [\eta''],$$

$$\left[\frac{\eta'}{\eta''}\right] = [\eta'] - [\eta''],$$

$$[\eta^r] = r[\eta],$$

dont nous ferons usage dans la suite. De la même manière nous désignerons le degré total de m fonctions homogènes $\eta_1, \ldots, \eta_m$ par $[\eta_1, \ldots, \eta_m]$, c'est à dire nous poserons

$$[\eta_1, \ldots, \eta_m] = [\eta_1] + \cdots + [\eta_m].$$

Une propriété caractéristique du système fondamental d'un genre $G(x_1, x_2, \eta)$ peut s'énoncer par le théorème important suivant:

Un système $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ de n fonctions indépendantes entières et homogènes n'est un système fondamental que dans le cas seul où son degré total N, est aussi petit que possible, c'est à dire quand le nombre entier

$$N = [\zeta_1] + [\zeta_2] + \cdots + [\zeta_n]$$
$$= [\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n]$$

est minimum.

Soit en effet $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ un système indépendant dont le degré est

minimum, et supposons que ce système ne soit pas fondamental, il devrait exister au moins une fonction $\bar{\eta}$ entière et algébrique qui représentée par celui-ci se présenterait sous la forme fractionnaire

$$\bar{\eta} = \frac{u_1(x_1, x_2)\eta_1 + \ldots + u_n(x_1, x_2)\eta_n}{\xi_1}.$$

D'après le théorème énoncé à la fin du chapitre précédent on pourrait remplacer ce système par un autre de degré moindre, ce qui est impossible puisque le degré $[\eta_1, \ldots, \eta_n]$ est déjà par hypothèse un minimum. Donc tout système dont le degré est minimum est un système fondamental.

Inversement aussi, le degré d'un système fondamental est minimum. S'il existait en effet un autre système $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ de degré encore moindre, on montrerait facilement que ses n éléments ne sont pas indépendants les uns des autres. Pour le démontrer imaginons-nous les éléments des deux systèmes rangés par ordre de degré croissant, c'est à dire de façon que

$$[\zeta_1] \leqq [\zeta_2] \leqq \cdots \leqq [\zeta_n],$$
$$[\eta_1] \leqq [\eta_2] \leqq \cdots \leqq [\eta_n],$$

et comparons, en commençant par ζ_1 et η_1, les degrés de deux éléments se correspondant dans une même colonne verticale. Comme le degré $[\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ est supérieur à $[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n]$, on arrivera nécessairement à deux éléments correspondants ζ_i et η_i pour lesquels on aura

$$[\eta_i] < [\zeta_i]$$

et le degré des i premiers éléments $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_i$ sera à fortiori inférieur à celui de ξ_i. Comme $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est un système fondamental, $(\eta_1, \ldots, \eta_i)$ peuvent être représentés par celui-ci linéairement et d'une façon homogène avec des coefficients entiers, on a donc les i équations:

$$(2) \qquad \begin{cases} \eta_1 = \alpha_{11}\zeta_1 + \ldots + \alpha_{1,i-1}\zeta_{i-1}, \\ \eta_2 = \alpha_{21}\zeta_1 + \ldots + \alpha_{2,i-1}\zeta_{i-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_i = \alpha_{i1}\zeta_1 + \ldots + \alpha_{i,i-1}\zeta_{i-1}, \end{cases}$$

où les éléments $\zeta_i, \zeta_{i+1}, \ldots, \zeta_n$ ne peuvent intervenir puisqu'ils sont de degré supérieur à celui des éléments $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_i$ représentés. Mais si les i fonctions $(\eta_1, \ldots, \eta_i)$ sont exprimables en fonction linéaire et homogène de $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1})$, elles ne sont pas indépendantes les unes des autres, car alors on pourra déterminer i fonctions $A_1, \ldots, A_i$ de (x_1, x_2) différentes de zéro, de manière qu'ils satisfassent à l'équation:

$$A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + \ldots + A_i\eta_i = 0$$

parce qu'après la substitution des expression (2) pour $(\eta_1, \ldots, \eta_i)$ tous les coefficients de $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1})$ sont identiquement nuls. Il n'y a donc pas, par suite, de système indépendant $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ de degré moindre que le système fondamental, ce qui démontre entièrement le théorème énoncé précédemment.

Après avoir ainsi trouvé la propriété caractéristique de ce système fondamental, on est tout naturellement conduit à se demander s'il en existe plusieurs, et si tel est le cas, quel rapport les relie entre eux. La solution se trouve donnée par un théorème général, dont voici l'énoncé:

Soient $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ et $(\zeta_1', \zeta_2', \ldots, \zeta_n')$ deux systèmes fondamentaux du genre $G(x_1, x_2, \eta)$ ordonnés d'après les degrés de leurs éléments, de sorte qu'en général on ait

$$[\zeta_r] \leqq [\zeta_{r+1}] \quad \text{et} \quad [\zeta_r'] \leqq [\zeta_{r+1}'],$$

deux éléments correspondants ont toujours le même degré, c'est à dire que l'on a

$$[\zeta_r] = [\zeta_r']. \qquad {\scriptstyle (r=1,2,\ldots,n)}$$

Pour démontrer ce théorème, comparons, en commençant par ζ_1 et ζ_1' les degrés de deux éléments correspondants. Si le théorème précédent était faux, on arriverait forcément à la fin à deux éléments correspondants ζ_i et ζ_i' de degré différent tels que

$$[\zeta_i] > [\zeta_i'];$$

on démontre alors exactement comme dans la première proposition qu'on peut exprimer les i éléments $(\zeta_1', \ldots, \zeta_i')$ en fonction linéaire et homogène des $(i - 1)$ éléments $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1})$ du premier système fondamental, car

les éléments suivants $(\zeta_i, \zeta_{i+1}, \ldots, \zeta_n)$ sont de degré supérieur à celui de $(\zeta'_1, \ldots, \zeta'_{i-1})$. On en concluerait tout comme précédemment qu'il existe une relation linéaire entre $(\zeta'_1, \ldots, \zeta'_i)$ de la forme

$$A_1\zeta'_1 + \ldots + A_i\zeta'_i = 0,$$

que ceux-ci ne sont donc pas indépendants; ce qui se trouve en contradiction avec l'hypothèse suivant laquelle $(\zeta'_1, \ldots, \zeta'_n)$ serait un système fondamental. On doit donc avoir aussi $[\zeta_i] = [\zeta'_i]$, ce qui démontre le théorème énoncé plus haut.

Ce théorème conduit à une relation entre deux systèmes fondamentaux, relation au moyen de laquelle on déduit aisément tous les systèmes fondamentaux d'un seul. Si on considère en effet dans deux systèmes fondamentaux $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ et $(\zeta'_1, \zeta'_2, \ldots, \zeta_n)$ les éléments *seuls* dont le degré ne dépasse pas un nombre μ arbitraire d'ailleurs, mais désigné à l'avance, leur nombre sera, d'après le théorème précédent, le même dans les deux systèmes. Soient pour une valeur μ déterminée

$$(\zeta_1, \ldots, \zeta_\lambda) \quad \text{et} \quad (\zeta'_1, \ldots, \zeta'_\lambda)$$

les éléments que l'on considère ici, il résulte de ce qui précède que les λ éléments $\zeta'_1, \ldots, \zeta'_\lambda$ peuvent s'exprimer en fonction linéaire et homogène du système $\zeta_1, \ldots, \zeta_\lambda$ à l'aide de fonctions de x_1, x_2 entières et homogènes comme coefficients, car dans l'expression de ces éléments par le système complet $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ les dernières fonctions $(\zeta_{\lambda+1}, \ldots, \zeta_n)$ ne sauraient intervenir. On peut de même exprimer les fonctions $\zeta_1, \ldots, \zeta_\lambda$ par le système $(\zeta'_1, \ldots, \zeta'_\lambda)$. Il doit donc exister deux systèmes de λ équations linéaires

$$\zeta'_i = \sum_{k=1}^{k=\lambda} \alpha_{ik}\zeta_k; \qquad \zeta_k = \sum_{\tau=1}^{\tau=\lambda} \alpha'_{k\tau}\zeta'_\tau, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

(α_{ik}) et $(\alpha'_{k\tau})$ qui entrent comme coefficients étant des fonctions entières et homogènes de (x_1, x_2).

Si on remplace dans les λ premières équations les fonctions ζ_k par leur valeur tirée du second système on obtient les équations

$$\zeta'_i = \sum_{k=1}^{k=\lambda} \sum_{i=1}^{i=\lambda} \alpha_{ik}\alpha'_{k\tau}\zeta'_\tau, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

et comme ces équations ne peuvent avoir lieu que si les coefficients de

$\zeta_1', \ldots, \zeta_1^{\lambda}$ coïncident dans les deux membres, on obtient pour les coefficients de la substitution les λ^2 équations

$$\sum_{k=1}^{k=\lambda} \alpha_{ik}\alpha'_{k\tau} = \partial_{i\tau}. \qquad \begin{pmatrix} i, \tau = 1, 2, \ldots, \lambda \\ \partial_{ii} = 1 \\ \partial_{i\tau} = 0 \text{ pour } i \gtrless \tau \end{pmatrix}$$

On en déduit, en appliquant le théorème relatif à la multiplication de deux déterminants

$$|\alpha_{ik}| \cdot |\alpha'_{k\tau}| = \left| \sum_{k=1}^{k=\lambda} \alpha_{ik}\alpha'_{k\tau} \right| = |\partial_{i\tau}| = 1,$$

c'est à dire que le produit des deux déterminants de substitution est égal à 1. Comme tous les éléments des deux systèmes (α_{ik}) et $(\alpha'_{k\tau})$ sont des fonctions de (x_1, x_2) *entières* et homogènes, il en résulte que ces deux déterminants de substitution sont elles-mêmes des constantes différentes de zéro. On peut donc énoncer le théorème suivant:

Si on considère dans deux systèmes fondamentaux $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ et $(\zeta_1', \ldots, \zeta_n')$ seulement les éléments $(\zeta_1, \ldots, \zeta_\lambda)$ et $(\zeta_1', \ldots, \zeta_\lambda')$ dont le degré est inférieur à un nombre déterminé μ, un de ces systèmes partielles dérive de l'autre par une substitution à coefficients entiers et à déterminant constant et différent de zéro.

Si en particulier on choisit comme limite supérieure un nombre μ supérieur au degré le plus élevé des éléments des deux systèmes, si donc on prend

$$\mu > [\zeta_n]$$

on obtient le corollaire suivant:

Tout système fondamental $(\zeta_1', \ldots, \zeta_n')$ provient de l'un quelconque de ceux-ci $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ par une substitution dont les coefficients sont des fonctions entières et homogènes de (x_1, x_2) et dont le déterminant est une constante différente de zéro.

Si réciproquement $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ est un système fondamental et $(\zeta_1', \ldots, \zeta_n')$ un système de fonctions entières et homogènes qui provient de la première par une substitution

$$\zeta_i' = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{ik}\zeta_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dont le déterminant est une constante différente de zéro, $(\zeta_1', \ldots, \zeta_n')$ sera un système fondamental. Car en résolvant ces n équations on obtient un système

$$\zeta_i = \sum \alpha_{ik}' \zeta_k'$$

dont les coefficients sont également des fonctions entières de x_1, x_2, puisque le seul dénominateur qui puisse se présenter, le déterminant $|\alpha_{ik}|$, est une constante différente de zéro.

Donc puisque pour chacun des deux systèmes $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ et $(\zeta_1', \ldots, \zeta_n')$ dont l'un est un système fondamental, les éléments de l'un s'expriment en fonction linéaire et homogène de ceux de l'autre, les coefficients de ces expressions étant entiers, il en résulte que $(\zeta_1', \ldots, \zeta_n')$ est aussi un système fondamental.

On trouve donc, d'après ce que nous venons de dire, qu'il existe en effet une infinité de systèmes fondamentaux qui dérivent tous les uns des autres par une substitution du genre indiqué plus haut, le premier système étant choisi arbitrairement parmi tous ces systèmes fondamentaux, qui sont les seuls à jouir de cette propriété; on voit enfin qu'on tient en main tous les systèmes dès qu'on en a trouvé un.

Nous allons maintenant à la place de x_1, x_2 introduire des quantités ξ_1, ξ_2 reliées aux précédentes par les deux équations

$$\xi_1 = \alpha' x_1 - \alpha'' x_2,$$
$$\xi_2 = \beta' x_1 - \beta'' x_2,$$

dont le déterminant de substitution $(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha')$ est différent de zéro; ou bien, ce qui revient au même, nous allons remplacer la variable indépendante x par une autre ξ qui en dérive par une substitution arbitraire, linéaire et fractionnaire

$$\xi = \frac{\alpha' x - \alpha''}{\beta' x - \beta''}.$$

Désignons par

$$\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \ldots, \bar{\zeta}_n$$

les fonctions homogènes du genre transformé $G(\xi_1, \xi_2, \eta)$ qui proviennent des éléments $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ du système fondamental du genre $G(x_1, x_2, \eta)$, ce système sera également un système fondamental parce

que $(\bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n)$ constituent de nouveau un système de n fonctions indépendantes et algébriquement entières dont le degré $[\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \ldots, \bar{\zeta}_n]$ est minimum.

Comme d'autre part le degré des éléments respectifs du système, et par suite aussi le degré total, reste le même après cette transformation, on peut énoncer le théorème suivant:

Les degrés

$$[\zeta_1], [\zeta_2], \ldots, [\zeta_n]$$

des n éléments d'un système fondamental du genre $G(x_1, x_2, \eta)$, et par suite aussi son degré total

$$N = [\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n]$$

restent les mêmes pour toute transformation des quantités (x_1, x_2), linéaire, homogène et réversible. Ils sont donc des invariants pour toute transformation de ce genre, ou, ce qui revient au même, pour toute transformation de la variable x linéaire, fractionnaire et réversible.

Enfin on peut encore soumettre les degrés des éléments d'un système fondamental $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ à une étude plus approfondie. Qu'on s'imagine ces éléments, ce qui va toujours avoir lieu dans la suite, rangés par ordre de grandeur de leurs degrés; dans cette hypothèse ζ_1 est nécessairement une constante et par suite on a

$$[\zeta_1] = 0,$$

car autrement toutes les fonctions entières du genre $G(x_1, x_2, \eta)$ de degré 0, c'est à dire les constantes, ne pourraient être exprimées au moyen du système fondamental $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$. Par contre ζ_2 ne peut être une constante sans quoi ζ_1 et ζ_2 ne seraient pas indépendants, donc, nécessairement $[\zeta_2]$ et à fortiori aussi $[\zeta_3], \ldots, [\zeta_n]$ devront être égaux ou supérieurs à l'unité.

Il en résulte que le degré total

$$N = [\zeta_1] + [\zeta_2] + \ldots + [\zeta_n]$$

du système fondamental est un nombre entier positif qui est au moins égal à $(n - 1)$.

Posons

$$N = n - 1 + p,$$

c'est à dire

$$p = N - n + 1,$$

où la constante p sera un nombre entier $\geqq 0$; celle-ci est un invariant de la plus haute importance pour le genre $G(x_1, x_2, \eta)$, ou, ce qui revient au même, pour l'équation primitive

$$f(x, y) = 0,$$

qui définit la *classe* de courbes algébriques, car les considérations suivantes nous apprendront que p est un invariant pour la transformation bien définie et réversible des trois quantités x_1, x_2, η, ou, ce qui revient au même, pour les deux variables (x, y). Ce nombre p sera designé d'après WEIERSTRASS par le »rang» des courbes algébriques ou du genre $G(x_1, x_2, \eta)$.

Mais avant d'employer le système fondamental pour représenter les fonctions du genre $G(x_1, x_2, \eta)$ nous résoudrons en entier d'abord la question fondamentale de cette théorie à savoir: la recherche d'un système fondamental et sa formation.

§ 5. *Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction algébrique et entière soit divisible par une puissance fractionnaire d'un facteur linéaire.*

Soit

$$(1) \qquad \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$$

un système arbitraire de n fonctions algébriques et entières, homogènes, que nous supposerons ordonné d'après les degrés de ses éléments, de façon que

$$(1\text{ a}) \qquad [\eta_1] \leqq [\eta_2] \leqq \cdots \leqq [\eta_n].$$

Si ce système n'est pas un système fondamental du genre $G(x_1, x_2, \eta)$

il existe au moins une fonction $\bar{\eta}$ algébrique et entière qui peut être exprimée sous forme de fraction par le système (1), comme il suit:

$$(2) \qquad \bar{\eta} = \frac{u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + \dots + u_n\eta_n}{\xi_1},$$

les coefficients $u_i(x_1, x_2)$ ne contenant pas tous ξ_1 en facteur. Soit maintenant ξ_2 un facteur linéaire arbitraire mais qui ne soit pas équivalent à ξ_1, c'est à dire, soit

$$(3) \qquad \left| \begin{aligned} \xi_1 &= \alpha' x_1 - \alpha'' x_2, \\ \xi_2 &= \beta' x_1 - \beta'' x_2, \end{aligned} \right.$$

ou $(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') \lessgtr 0$, remplaçons dans (2) (x_1, x_2) par (ξ_1, ξ_2), on pourra comme dans (8 a) du paragraphe 3 laisser de côté tous les membres de somme dans les coefficients $u_i(\xi_1, \xi_2)$ qui contiennent ξ_1 en facteur car ceux-ci sont évidemment algébriquement entiers. Ceci fait, on obtient comme dans § 3 un reste de la forme suivante

$$\eta' = \frac{v_1\xi_2^{\lambda_1}\eta_1 + v_2\xi_2^{\lambda_2}\eta_2 + \dots + v_n\xi_2^{\lambda_n}\eta_n}{\xi_1}$$

qui considéré en lui-même doit être algébriquement entier. $v_1, v_2, \dots, v_n$ sont ici des constantes et les exposants $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de ξ_2 forment évidemment une suite décroissante de nombres entiers positifs, car d'après (1 a) les degrés de $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ forment une suite croissante. Si enfin on met η' sous la forme

$$\eta' = \xi_2^{\lambda_n} \cdot \frac{v_1\xi_2^{\lambda_1-\lambda_n}\eta_1 + \dots + v_{n-1}\xi_2^{\lambda_{n-1}-\lambda_n}\eta_{n-1} + v_n\eta_n}{\xi_1}$$

on peut constater comme précédemment que le coefficient de $\xi_2^{\lambda_n}$ qui figure au second membre doit être également algébriquement entier.

On obtient donc tout d'abord le théorème suivant:

Le système $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ composé de n fonctions indépendantes algébriques et entières n'est pas un système fondamental dans le cas seul où il est possible de déterminer un facteur linéaire $\xi_1 = \alpha' x_1 - \alpha'' x_2$ et n constantes $v_1, v_2, \dots, v_n$ non toutes nulles de telle sorte que la fonction homogène

$$(4) \qquad \frac{v_1\xi_2^{\lambda_1-\lambda_n}\eta_1 + \dots + v_{n-1}\xi_2^{\lambda_{n-1}-\lambda_n}\eta + v_n\eta_n}{\xi_1}$$

soit algébriquement entière, et par conséquent n'ait pas d'infini *fixe* pour le zéro de ξ_1.

Nous allons d'abord considérer le facteur linéaire ξ_1 comme donné arbitrairement et nous chercherons à déterminer les constantes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de façon que le quotient (4) devienne algébriquement entier. Dans ce but et pour plus de simplicité, à la place des n fonctions $\eta_1, \ldots, \eta_n$ dont les degrés sont en général différents entre eux, nous allons introduire les n fonctions

$$(5) \qquad e_1 = \xi_2^{\lambda_1-\lambda_n}\eta_1, \ldots, e_{n-1} = \xi_2^{\lambda_{n-1}-\lambda_n}\eta_{n-1}, \qquad e_n = \eta_n,$$

dont les degrés sont tous les mêmes et ont évidemment pour valeur commune celle du degré du dernier élément η_n, que nous désignerons par μ. Avec ces notations nous pourrons définir comme il suit la tâche qui nous reste à accomplir:

Il faut déterminer de la façon la plus générale les constantes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de façon que le quotient

$$(5) \qquad e = \frac{v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_n e_n}{\xi_1}$$

soit algébriquement entier et par conséquent ne possède aucun infini pour le zéro $\left(x = \frac{a'}{a}\right)$ de ξ_1.

Il est clair que les n fonctions de même degré $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ constituent un système de quantités indépendantes, tout comme les fonctions $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ de degré différent dont on les a déduites; toute autre quantité du genre $G(x_1, x_2, \eta)$ pourra donc être exprimée par $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ sous forme linéaire et à l'aide de coefficients, fonctions rationnelles de (ξ_1, ξ_2).

Posons maintenant

$$(6) \qquad w = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_n e_n,$$

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ ayant des valeurs arbitraires, et exprimons les n produits

$$w e_1, w e_2, \ldots, w e_n$$

au moyen du système $(e_1, e_2, \dots, e_n)$; on obtient n équations de la forme

$$we_1 = v_{11}e_1 + \dots + v_{1n}e_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$we_n = v_{n1}e_1 + \dots + v_{nn}e_n,$$

les coefficients (v_{ik}) étant évidemment tous des fonctions linéaires et homogènes de $v_1, \dots, v_n$, et dont les coefficients sont tous des fonctions homogènes de (ξ_1, ξ_2) de degré μ, car les produits (we_i) sont de degré 2μ. Par l'élimination de $e_1, e_2, \dots, e_n$ entre ces n équations on obtient finalement une équation de degré n en w qui mise sous forme de déterminant s'écrit

$$(7) \qquad (-1)^n \begin{vmatrix} (v_{11} - w) & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & (v_{22} - w) & \dots & v_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & (v_{nn} - w) \end{vmatrix}$$

$$= w^n + U_1(v_1, v_2, \dots, v_n)w^{n-1} + \dots + U_n(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$$

qui évidemment pour des valeurs indéterminées des coefficients $(v_1, \dots, v_n)$ est irréductible, sans quoi toute fonction algébrique du genre $G(\xi_1, \xi_2, \eta)$ satisferait à une équation de degré inférieur.

Du mode même de formation des coefficients $U_1, \dots, U_n$ il résulte, sans qu'il soit besoin de donner plus de détails, que ceux-ci sont des fonctions homogènes et entières des constantes $v_1, \dots, v_n$ dont les degrés par rapport à celles-ci sont respectivement $1, 2, \dots, n$. Comme de plus en considérant des valeurs variables des paramètres $v_1, \dots, v_n$, w se trouve être algébriquement entier, il en résulte que ces coefficients sont des fonctions de (ξ_1, ξ_2) *entières* et homogènes dont les degrés sont évidemment égaux respectivement à $\mu, 2\mu, \dots, n\mu$, μ étant le degré commun des n fonctions $e_1, e_2, \dots, e_n$ comme on l'a supposé plus haut.

Si maintenant la fonction définie par (5)

$$e = \frac{w}{\xi_1}$$

se trouvait être aussi algébriquement entière, l'équation

$$0 = e^n + \frac{U_1(v_1, v_2, \ldots, v_n)}{\xi_1} e^{n-1} + \frac{U_2(v_1, v_2, \ldots, v_n)}{\xi_1^2} e^{n-2} + \ldots$$
$$+ \frac{U_n(v_1, v_2, \ldots, v_n)}{\xi_1^n}$$

à laquelle e satisfait évidemment, devra avoir également tous ses coefficients entiers, donc tous les dénominateurs devront disparaître, sans quoi au moins une des n fonctions conjuguées à e deviendrait infinie pour le zéro fixe de ξ_1. Donc le quotient $e = \frac{w}{\xi_1}$ sera algébriquement entier dans le cas seul où les constantes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont déterminées de façon que, en général, $U_i(v_1, \ldots, v_n)$ soit divisible par ξ_1^i ou, ce qui revient au même, de façon que les n congruences

$$(8) \qquad \begin{aligned} U_1(v_1, \ldots, v_n) &\equiv 0 \quad \text{mod } \xi_1, \\ U_2(v_1, \ldots, v_n) &\equiv 0 \quad \text{mod } \xi_1^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_n(v_1, \ldots, v_n) &\equiv 0 \quad \text{mod } \xi_1^n, \end{aligned}$$

soient satisfaites simultanément. Si on développe ces fonctions suivant les puissances croissantes de ξ_1, les coefficients de $\xi_1^0, \xi_1^1, \xi_1^2, \ldots, \xi_1^{i-1}$ dans $U_i(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ devront disparaître, ces coefficients étant tous des fonctions homogènes de degré i en $v_1, v_2, \ldots, v_n$ à coefficients constants. Les n conditions (8) donnent donc un système de

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

équations homogènes en $v_1, \ldots, v_n$ à coefficients constants, dont une est du premier degré, deux du second, enfin n du n^e degré par rapport aux n inconnues.

La résolution complète de ces équations présente déjà quand $n > 2$ des difficultés presque insurmontables qui disparaissent cependant dès que nous considérons d'une façon plus générale cette tâche qui se présente à nous. Nous dirons qu'une fonction entière et homogène w est divisible

algébriquement par un facteur linéaire ξ_1 quand le quotient $e = \frac{w}{\xi_1}$ est également algébriquement entier, c'est à dire ne possède aucun infini *fixe* pour le zéro $\left(x = \frac{a''}{a'}\right)$ de ξ_1. D'après les considérations que l'on vient d'exposer il résulte que la fonction w est algébriquement divisible par ξ_1 dans le cas seul où ses n coefficients $(v_1, \ldots, v_n)$ satisfont aux n conditions (8). Soit maintenant δ une fraction quelconque rationnelle, comprise entre zéro et un, et soit ξ_1^δ une quelconque des puissances fractionnaires du facteur linéaire ξ_1 qui diffèrent entre elles seulement par des constantes. Nous dirons alors, que la fonction algébrique et entière est algébriquement divisible par la puissance fractionnaire ξ_1^δ quand le quotient

$$\bar{e} = \frac{w}{\xi_1^\delta}$$

est algébriquement entier en ce sens qu'il ne possède aucun infini fixe pour le zéro $\left(x = \frac{a''}{a'}\right)$ de ξ_1. Remplaçons dans l'équation (7) la quantité w par son expression $\bar{e}\xi_1^\delta$, on voit que $\bar{e}$ satisfait à l'équation:

$$0 = \bar{e}^n + \frac{U_1(v_1, \ldots, v_n)}{\xi_1^\delta} e^{n-1} + \frac{U_2(v_1, \ldots, v_n)}{\xi_1^{2\delta}} e^{n-2} + \ldots + \frac{U_n(v_1, \ldots, v_n)}{\xi_1^{n\delta}},$$

qui montre que $\bar{e}$ ne possède aucun infini fixe pour le zéro de ξ_1 que dans le cas seul où tous les dénominateurs en évidence disparaissent. Donc les coefficients $v_1, \ldots, v_n$ devront satisfaire aux conditions

$$(9) \qquad \begin{aligned} U_1(v_1, \ldots, v_n) &\equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ \xi_1^\delta, \\ U_2(v_1, \ldots, v_n) &\equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ \xi_1^{2\delta}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ U_n(v_1, \ldots, v_n) &\equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ \xi_1^{n\delta}, \end{aligned}$$

qui sont une généralisation immédiate des congruences du système (8).

Mais une fonction homogène et entière $U_i(\xi_1, \xi_2)$ ne peut évidemment contenir en facteur qu'une puissance *entière* de ξ_1. Donc la fonction $U_i(\xi_1, \xi_2)$ ne sera divisible par la puissance fractionnaire $\xi_1^{i\delta}$ que dans le cas seul où elle contiendra la puissance entière immédiatement supérieure de ce facteur linéaire.

Dans ce qui va suivre nous désignerons toujours par le symbole $|\alpha|$ le nombre entier le plus petit qui est supérieur ou égal au nombre α arbitrairement donné. Ceci posé, la fonction $U_i(\xi_1, \xi_2)$ entière et homogène n'est divisible par la puissance fractionnaire $\xi_1^{i\partial}$ que dans le cas seul où elle contient la puissance entière $\xi_1^{|i\partial|}$ en facteur. Nous en déduisons comme conséquence immédiate que la fonction w entière et homogène est algébriquement divisible par la puissance fractionnaire ξ_1^{∂} dans le cas seul où les coefficients $v_1, \ldots, v_n$ sont choisis de façon que les n équations de condition

$$
(9\text{ a})\qquad
\begin{aligned}
&U_1(v_1, \ldots, v_n) \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ \xi_1^{|\partial|},\\
&U_2(v_1, \ldots, v_n) \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ \xi_1^{|2\partial|},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&U_n(v_1, \ldots v, _n) \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ \xi_1^{|n\partial|},
\end{aligned}
$$

soient satisfaites, et celles-ci sont absolument équivalentes à celles du système (9).

Il est maintenant d'une importance tout à fait capitale pour la suite de déterminer les puissances fractionnaires de ξ_1 qui divisent *exactement* une fonction algébrique et entière. Soit donc ξ_1^{∂} la plus haute puissance fractionnaire de ξ_1 qui divise une fonction donnée w, nous supposons donc que $\xi_1^{\partial_1}$ ne divise plus w, dès que ∂_1 prend une valeur supérieure à ∂ aussi rapprochée de celle-ci que l'on voudra. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est évidemment que les n équations (9 a) soient satisfaites simultanément et que par contre une au moins d'entre elles n'ait plus lieu dès que l'on vient à remplacer ∂ par une fraction ∂_1 supérieure. Si maintenant aucun des n produits $\partial, 2\partial, \ldots, n\partial$ n'est un nombre entier on a toujours

$$i\partial < |i\partial|;$$

on peut donc évidemment toujours trouver une fraction ∂_1 qui surpasse ∂ de si peu que chacun des n produits $\partial_1, 2\partial_1, \ldots, n\partial_1$ se trouve inférieur aux mêmes nombres entiers respectifs, comme le multiple correspondant de la fraction ∂; cette fraction ∂_1 sera donc telle que pour $i = 1, 2, \ldots, n$ on aura

$$|i\partial_1| = |i\partial|.$$

Mais alors d'après (9 a) w est aussi algébriquement divisible par la puissance supérieure $\xi_1^{\partial_1}$.

Si donc ξ_1^{∂} est la plus haute puissance de ξ_1 contenue dans w il faut nécessairement qu'un des multiples $\partial, 2\partial, \ldots, n\partial$, $i\partial$ par exemple, soit égal à un nombre entier m; on devra donc avoir

$$\partial = \frac{m}{i}, \qquad 1 \leqq i \leqq n.$$

Si c'est là le cas, w peut être exactement divisible par ξ_1^{∂}, car la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que les n équations de condition (9 a) soient remplies et qu'en outre $U_i(v_1, \ldots, v_n)$ ne contienne en facteur aucune puissance de ξ_1 supérieure à $|i\partial|$ ou m. On obtient donc le théorème suivant:

Une fonction algébrique et entière ne peut être exactement divisible par une puissance fractionnaire d'un facteur linéaire que dans le cas seul où l'exposant ∂ est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne peut être qu'un des nombres $1, 2, \ldots, n$.

Dans la recherche de la divisibilité d'une fonction algébrique par la puissance fractionnaire d'un facteur linéaire les seuls exposants $\partial = \frac{m}{i}$ qui peuvent se présenter sont donc ceux pour lesquels

$$m \leqq i \leqq n.$$

Pour les degrés $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ils sont, rangés par ordre de grandeur croissante

$n =$	$\partial =$
1	$0, 1,$
2	$0, \frac{1}{2}, 1,$
3	$0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1,$
4	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1,$
5	$0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1.$

Pour le degré n le nombre ρ_n des exposants δ fractionnaires qui interviennent ici est déterminé par l'équation

$$\rho_n = \varphi(0) + \varphi(1) + \ldots + \varphi(n),$$

$\varphi(i)$ désignant l'ensemble des nombres inférieurs à i et premiers avec lui, et $\varphi(0)$ devant être pris égal à l'unité; car quand on passe du degré $(n - 1)$ au degré n il vient s'ajouter aux ρ_{n-1} fractions qui existent déjà encore un nombre égal à $\varphi(n)$, dont le dénominateur est égal à n et dont le numérateur est premier avec n.[1]

Pour une valeur donnée de n ces exposants δ rangés par ordre de grandeur croissante peuvent s'écrire:

$$(10) \qquad \delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\rho \qquad (\rho = \rho_n)$$

de sorte qu'en général

$$(10\,a) \qquad \delta_{k+1} > \delta_k, \qquad \delta_0 = 0, \qquad \delta_\rho = 1.$$

On peut donner de suite ici une propriété caractéristique de ces ρ nombres, propriété qui nous sera utile dans la suite. Soient δ_k et δ_{k+1} deux fractions consécutives de la suite (10) et soit i un quelconque des nombres entiers $1, 2, \ldots, n$, il ne peut jamais exister un nombre entier m *entre* les deux fractions $i\delta_k$ et $i\delta_{k+1}$, car dans l'hypothèse:

$$i\delta_k < m < i\delta_{k+1}$$

ou

$$\delta_k < \frac{m}{i} < \delta_{k+1}$$

on serait conduit à admettre que δ_k et δ_{k+1} ne sont pas deux nombres consécutifs de la suite (10), ce qui est contraire à l'hypothèse primitive.

---

[1] La valeur approchée de ce nombre remarquable ρ_n pour des valeurs très grandes de n a été d'abord donnée par DIRICHLET (Comptes rendus de l'académie de Berlin, année 1849) et plus tard avec un peu plus de précision par M. MERTENS (Journal de Crelle, t. 77, pag. 289—338); elle satisfait à l'équation limite

$$\lim_{n=\infty} \frac{\rho_n}{n^2} = \frac{3}{\pi^2}.$$

Soit donc $(i\partial_k + \alpha)$ un nombre quelconque situé *entre* $i\partial_k$ et $i\partial_{k+1}$, on a toujours

$$(11) \qquad |i\partial_k + \alpha| = |i\partial_{k+1}|.$$

Par contre le nombre entier $|i\partial_k|$ lui-même se trouve être inférieur exactement d'une unité au nombre entier $|i\partial_{k+1}|$ dans le cas seul où le produit $i\partial_k$ est lui-même un nombre entier m, c'est à dire où $\partial_k = \frac{m}{i}$; la raison en est qu'il ne peut y avoir aucun nombre entier *entre* $i\partial_k$ et $i\partial_{k+1}$. On a donc toujours l'équation

$$(11\,a) \qquad |i\partial_{k+1}| = |i\partial_k| + \varepsilon_k^{(i)},$$

$\varepsilon_k^{(i)}$ étant l'unité ou zéro selon que le produit $i\partial_k$ est entier ou non, c'est à dire selon que i est un multiple du dénominateur de ∂_k ou non.

De la définition précédente de la divisibilité d'une fonction algébrique par une puissance fractionnaire d'un facteur linéaire, il résulte maintenant qu'une fonction w étant algébriquement divisible par une puissance $\xi_1^{\partial_{k+1}}$ doit contenir nécessairement toute puissance inférieure de ξ_1 dont les exposants $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_k$ figurent dans la suite (10). Entre les deux cas extrêmes où la fonction

$$w = v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n$$

ne contient pas du tout le facteur linéaire ξ_1 ou le contient à la première puissance, se trouvent donc les ρ possibilités que w soit exactement divisible par une puissance fractionnaire $\xi_1^{\partial_k}$.

On est donc conduit à supposer que la solution du problème qui consiste à déterminer de la façon la plus générale les constantes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de manière que w soit algébriquement divisible par ξ_1 va se simplifier singulièrement si, au lieu de procéder brusquement en passant d'un cas extrême $(\partial_0 = 0)$ à l'autre $(\partial_\rho = 1)$, on va successivement de ∂_0 à ∂_1, puis de ∂_1 à ∂_2 et en général de ∂_k à ∂_{k+1}; si donc on cherche la solution pour l'exposant ∂_{k+1} en supposant le problème résolu pour ∂_k.

Nous voulons aussi faire l'hypothèse nouvelle que le nombre des fonctions indépendantes, algébriques et entières $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ne soit pas nécessairement égal à n, mais qu'il soit égal à un nombre arbitraire $\nu \leq n$.

Les considérations suivantes vont en effet apprendre que ce nombre peut être réduit chaque fois qu'on passe de δ_k à δ_{k+1}.

Soient donc maintenant

$$e_1, e_2, \ldots, e_\nu$$

ν fonctions indépendantes, homogènes, algébriques et entières de même degré μ, chacune d'elles étant algébriquement divisible par la puissance fractionnaire $\xi_1^{\delta_k}$, l'exposant δ_k étant une fraction quelconque de la suite (10). Soient encore $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ des constantes arbitraires, la fonction homogène

$$w = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_\nu e_\nu$$

est également divisible par la même puissance de ξ_1, car si l'on peut déterminer le paramètre variable u de manière que chacune des n quantités conjuguées à $\frac{e_i}{\xi_1^{\delta_k}}$ soit finie pour le zéro de ξ_1, il en sera de même pour l'expression:

$$\frac{w}{\xi_1^{\delta_k}} = v_1 \frac{e_1}{\xi_1^{\delta_k}} + v_2 \frac{e_2}{\xi_1^{\delta_k}} + \ldots + v_\nu \frac{e_\nu}{\xi_1^{\delta_k}}.$$

Nous nous proposons maintenant de déterminer les constantes $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ de la façon la plus générale de sorte que la fonction ne soit pas seulement divisible par $\xi_1^{\delta_k}$ mais encore par la puissance immédiatement supérieure $\xi_1^{\delta_{k+1}}$.

Dans le chapitre suivant nons montrerons qu'on peut déterminer ces constantes et par suite résoudre tout le problème en ne se servant que d'expressions rationnelles, car on est conduit seulement à un certain nombre d'équations linéaires et homogènes, faciles à établir, à coefficients constants, reliant les ν inconnues $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$.

§ 6. *Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction entière et algébrique soit divisible par un facteur linéaire.*

Dans le chapitre précédent nous avons ramené la recherche d'un système fondamental à la question suivante:

Soient

$$e_1, e_2, \ldots, e_\nu,$$

ν fonctions indépendantes entières et algébriques de même degré μ qui sont toutes algébriquement divisibles par la puissance fractionnaire $\xi_1^{\partial_k}$ d'un facteur linéaire ξ_1. Il faut déterminer de la façon la plus générale les constantes $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ dans la fonction algébrique

$$(1) \qquad w = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_\nu e_\nu$$

de sorte que w ne soit pas seulement algébriquement divisible par $\xi_1^{\partial_k}$ mais encore par la puissance fractionnaire suivante $\xi_1^{\partial_{k+1}}$.

Pour résoudre cette question, nous adjoindrons à la fonction w que nous examinons, $(n-1)$ autres constituées de même:

$$(2) \qquad \begin{aligned} w' &= v_1' e_1 + v_2' e_2 + \ldots + v_\nu' e_\nu, \\ w'' &= v_1'' e_1 + v_2'' e_2 + \ldots + v_\nu'' e_\nu, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w^{(n-1)} &= v_1^{(n-1)} e_1 + v_2^{(n-1)} e_2 + \ldots + v_\nu^{(n-1)} e_\nu, \end{aligned}$$

les coefficients $(v_i^{(k)})$ étant des constantes absolument arbitraires. Puisque par hypothèse les ν fonctions $(e_1, \ldots, e_\nu)$ sont toutes algébriquement divisibles par $\xi_1^{\partial_k}$, il en est de même pour les fonctions $(w', w'', \ldots, w^{(n-1)})$ pour des valeurs arbitraires des coefficients $v_i^{(k)}$.

Supposons maintenant qu'on ait choisi d'une façon quelconque les coefficients $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ de la fonction w à étudier, de manière que w soit non seulement divisible par $\xi_1^{\partial_k}$ mais encore par $\xi_1^{\partial_{k+1}}$. Si maintenant on forme le produit de w par les $(i-1)$ premières fonctions $w', w'', \ldots, w^{(i-1)}$,

$$(3) \qquad \overline{w}_i = w w' w'' \ldots w^{(i-1)},$$

celui-ci est évidemment algébriquement divisible par

$$\xi^{\partial_{k+1} + (i-1)\partial_k}$$

pour des valeurs indéterminées des coefficients de $w', w'', \ldots, w^{(i-1)}$ puisque le premier facteur de $\overline{w}_i$ contient la puissance ∂_{k+1} de ξ_1 et chacun des $(i-1)$ autres la puissance ∂_k seulement.

Faisons maintenant la somme des n quantités conjuguées a $\overline{w}_i$, nous obtenons ainsi une fonction homogène des coefficients $v_i^{(k)}$ des fonctions $w, w', \ldots, w^{(i-1)}$ dont les coefficients sont des fonctions homogènes et entières de (ξ_1, ξ_2) seulement. Des formules (9 a) du chapitre précédent il ressort maintenant que cette somme doit être divisible par $\xi_1^{|\delta|}$, si la fonction algébrique $\overline{w}_i$ correspondante est algébriquement divisible par ξ_1^{δ}. Désignons dans ce cas cette somme par

$$S(\overline{w}_i) = S(ww' \ldots w^{(i-1)}); \tag{4}$$

elle devra donc être divisible par

$$\xi_1^{|\delta_{k+1} + (i-1)\delta_k|}$$

au sens habituel du mot, et cela pour des valeurs indéterminées des coefficients de $w', w'', \ldots, w^{(i-1)}$. Mais la fraction $(\delta_{k+1} + (i-1)\delta_k)$ se trouve toujours comprise entre les deux fractions $i\delta_k$ et $i\delta_{k+1}$, elle peut par suite selon l'équation (11) du chapitre précédent, se mettre sous la forme $(i\delta_k + \alpha)$. Et, d'après le théorème démontré à ce propos on a

$$|\delta_{k+1} + (i-1)\delta_k| = |i\delta_{k+1}|.$$

Si donc w doit être algébriquement divisible par $\xi_1^{\delta_{k+1}}$ il faut que la somme, donnée par (4), des n fonctions conjuguées à $(ww' \ldots w^{(i-1)})$ soit divisible dans le sens ordinaire du mot, par la puissance entière $\xi_1^{|i\delta_{k+1}|}$ pour des valeurs indéterminées des coefficients des $(i-1)$ fonctions $w', w'', \ldots, w^{(i-1)}$.

Comme la condition analogue doit être remplie pour chacun des n produits

$$w, ww', ww'w'', \ldots, ww'w'' \ldots w^{(n-1)},$$

on trouve comme conditions nécessaires pour la divisibilité de w par $\xi_1^{\delta_{k+1}}$ les n congruences suivantes:

$$\begin{aligned} S(w) &\equiv 0 \quad \text{mod } \xi_1^{|\delta_{k+1}|}, \\ S(ww') &\equiv 0 \quad \text{mod } \xi_1^{|2\delta_{k+1}|}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ S(ww' \ldots w^{n-1}) &\equiv 0 \quad \text{mod } \xi_1^{|n\delta_{k+1}|}, \end{aligned} \tag{5}$$

pour des valeurs indéterminées des coefficients de $w', w'', \ldots, w^{(n-1)}$. On peut montrer d'abord facilement que ce sont là aussi des conditions suffisantes pour que w soit algébriquement divisible par $\xi_1^{\delta_k+1}$. Supposons en effet que les coefficients $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ soient tels que les congruences (5) soient satisfaites pour des valeurs indéterminées des coefficients de $w', w'', \ldots, w^{(n-1)}$, elle seront satisfaites à fortiori lorsqu'on prend tous les coefficients de $w', w'', \ldots, w^{(n-1)}$ égaux aux coefficients correspondants de w, ou, ce qui est la même chose, quand on prend

$$w' = w'' = \ldots = w^{(n-1)} = w.$$

S'il en est ainsi, on a

$$S(ww' \ldots w^{(i-1)}) = S(w^i) = S_i,$$

où $S_i = S(w^i)$ désigne la somme des n quantités conjuguées à w^i, ou la somme des puissances semblables de NEWTON de degré i. Si donc les conditions (5) sont remplies il en résulte immédiatement

(5 a) $$S_i \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ \xi_1^{|i\delta_k+1|},$$

d'où à fortiori

(5 b) $$S_i \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ \xi_1^{i\delta_k+1}.$$

Si donc les conditions (5) sont remplies les n premières puissances semblables

$$S_1, S_2, \ldots, S_n$$

sont respectivement divisibles par

$$\xi_1^{\delta_k+1}, \xi_1^{2\delta_k+1}, \ldots, \xi_1^{n\delta_k+1}.$$

Soient maintenant, comme dans (7) au paragraphe précédent,

$$U_1, U_2, \ldots, U_n$$

les coefficients de l'équation à laquelle satisfait w, on peut montrer facilement, que dans nos hypothèses ils sont également divisibles respectivement par

$$\xi_1^{\delta_k+1}, \xi_1^{2\delta_k+1}, \ldots, \xi_1^{n\delta_k+1},$$

d'où on déduit, d'après (9) du même chapitre, que w lui-même est algé-

briquement divisible par $\xi_1^{\delta_k+1}$. Puisque en effet S_1 et U_1 coïncident sauf pour le signe, la proposition que nous venons d'avancer est évidente pour U_1. Supposons le théorème vrai et démontré pour $U_1, U_2, \dots, U_{\lambda-1}$, il résulte alors immédiatement de l'équation

$$\lambda U_\lambda = -(S_1 U_{\lambda-1} + S_2 U_{\lambda-2} + \dots + S_{\lambda-1} U_1 + S_\lambda)$$

qui relie les sommes des puissances aux coefficients de l'équation, que U_λ est également divisible par la puissance $\xi_1^{\delta_k+1}$, puisque celle-ci se trouve en facteur dans chacun des produits qui figurent au second membre.

Comme les équations (5) conduisent aux conditions nécessaires et suffisantes de divisibilité de w par $\xi_1^{\delta_k+1}$, trouvées dans (9) au chapitre précédent, nous obtenons le théorème remarquable suivant:

La fonction algébrique w est algébriquement divisible par $\xi_1^{\delta_k+1}$ dans le cas seul où les n congruences

$$S(ww' \dots w^{(i-1)}) \equiv 0 \mod \xi_1^{|i\delta_k+1|} \qquad (i=1,\dots,n)$$

sont remplies pour des valeurs indéterminées des constantes qui figurent dans $w', \dots, w^{(i-1)}$.

Si chacune des n expressions (5) doit être divisible par $\xi_1^{|i\delta_k+1|}$ pour des valeurs indéterminées des coefficients $v', v'', \dots, v^{(i-1)}$ de $w', w'', \dots, w^{(i-1)}$, il faut évidemment que le coefficient de chacun des produits

$$v'_{h_1} v''_{h_2} \dots v^{(i-1)}_{h_{i-1}}, \qquad (h_1, h_2, \dots, h_{i-1} = 1, 2, \dots, \nu)$$

contienne cette puissance de ξ_1, et inversement chaque congruence (5) sera évidemment satisfaite si chacun de ces coefficients est divisible par $\xi_1^{|i\delta_k+1|}$. On obtient le coefficient de $v'_{h_1} v''_{h_2} \dots v^{(i-1)}_{h_{i-1}}$ quand on prend dans $S(ww' \dots w^{(i-1)})$

$$v'_{h_1} = v''_{h_2} = \dots = v^{(i-1)}_{h_{i-1}} = 1$$

et qu'on égale à zéro tous les autres coefficients de $w', \dots, w^{(i-1)}$. Mais par suite de cela on a

$$w' = e_{h_1}, \qquad w'' = e_{h_2}, \dots, w^{(i-1)} = e_{h_{i-1}}$$

et on peut remplacer les conditions (5) pour $v_1, \dots, v_\nu$ par le système suivant de congruences homogènes et linéaires:

$$(6) \qquad S(we_{h_1} e_{h_2} \dots e_{h_{i-1}}) \equiv 0 \mod \xi_1^{|i\delta_k+1|} \qquad \left(\begin{smallmatrix} i=1,2,\dots,n \\ h_\lambda=1,2,\dots,\nu \end{smallmatrix}\right)$$

qu'on peut encore écrire comme il suit:

$$(6\text{ a})\qquad 0 \equiv v_1 S(e_1, e_{h_1}, \ldots, e_{h_{i-1}}) + v_2 S(e_2, e_{h_1}, \ldots, e_{h_{i-1}}) + \cdots$$
$$+ v_\nu S(e_\nu, e_{h_1}, \ldots, e_{h_{i-1}}) \qquad \bmod \xi_1^{|i\vartheta_k+1|}.$$

On peut arriver à la condition (6) d'une autre façon plus simple pour le calcul. Si on forme en effet pour des valeurs indéterminées des coefficients $v_1, \ldots, v_\nu$ la somme des puissances semblables $S(w^i) = S_i$ de w, on obtient une fonction homogène de degré i en $(v_1, \ldots, v_\nu)$. Si on prend la différentielle partielle de celle-ci par rapport à un des coefficients v_{h_1} on obtient

$$\frac{\partial S(w^i)}{\partial v_{h_1}} = S\left(\frac{\partial w^i}{\partial v_{h_1}}\right) = S\left(iw^{i-1}\frac{\partial w}{\partial v_{h_1}}\right) = S(iw^{i-1}e_{h_1}),$$

car $S(w^i)$ est égal à la somme des n fonctions conjuguées à w^i. On a donc

$$\frac{\partial S(w^i)}{\partial v_{h_1}} = iS(w^{i-1}e_{h_1}).$$

Si on prend la différentielle partielle de cette équation par rapport à v_{h_2}, etc. on voit qu'on obtient finalement l'équation

$$\frac{\partial^{i-1} S(w^i)}{\partial v_{h_1}\partial v_{h_2}\ldots\partial v_{h_{i-1}}} = i(i-1)\ldots 2\,.\,1\, S(we_{h_1}e_{h_2}\ldots e_{h_{i-1}}),$$

dont le second membre coïncide, à un facteur numérique près qui est sans importance, avec le premier membre de la congruence (6).

Désignons donc par S_i la somme des puissances semblables $S(w^i)$ et par

$$S_i^{(i-1)}(v_1, \ldots, v_\nu)$$

chacune de ses dérivées d'ordre $(i-1)$ par rapport aux éléments v_1, $v_2, \ldots, v_\nu$. Alors on peut mettre les conditions nécessaires et suffisantes de divisibilité algébrique de w par $\xi_1^{\vartheta_k+1}$ sous la forme suivante plus simple

$$(7)\qquad S_i^{(i-1)}(v_1, v_2, \ldots, v_\nu) \equiv 0 \quad \bmod \xi_1^{|i\vartheta_k+1|}.$$

Sous cette forme les conditions cherchées apparaissent comme un grand nombre de congruences linéaires pour les modules $\xi_1^{|\delta_{k+1}|}, \xi_1^{|2\delta_{k+1}|}, \ldots, \xi_1^{|n\delta_{k+1}|}$.

En réalité ξ_1 seul entre comme module et le nombre de ces identités se réduit considérablement. Comme en effet, pour des valeurs indéterminées de $v_1, \ldots, v_\nu$, w est algébriquement divisible par $\xi_1^{\delta_k}$ d'après la supposition faite plus haut, il s'en suit que w^i est, au sens ordinaire, algébriquement divisible par $\xi_1^{i\delta_k}$ et aussi d'après l'équation (9) du chapitre précédent $S(w^i) = S_i$ par $\xi_1^{|i\delta_k|}$.

On a donc

$$S_i(v_1, \ldots, v_\nu) = \xi_1^{|i\delta_k|}\overline{S}_i(v_1, \ldots, v_\nu), \tag{7 a}$$

$\overline{S}_i(v_1, \ldots, v_\nu)$ étant aussi une fonction entière et homogène de $v_1, \ldots, v_\nu$ dont les coefficients sont des fonctions entières et homogènes de (ξ_1, ξ_2). Si on désigne donc maintenant par

$$\overline{S}_i^{(i-1)}(v_1, \ldots, v_\nu)$$

toute dérivée partielle de $\overline{S}_i$ d'ordre $(i-1)$ d'après $(i-1)$ quelconques des indéterminées $v_1, \ldots, v_\nu$, on obtient après $(i-1)$ différentiations de l'équation précédente

$$S_i^{(i-1)}(v_1, \ldots, v_\nu) = \xi_1^{|i\delta_k|}\overline{S}_i^{(i-1)}(v_1, \ldots, v_\nu);$$

on peut par suite écrire les conditions (7) sous la nouvelle forme suivante:

$$\overline{S}_i^{(i-1)}(v_1, \ldots, v_\nu) \equiv 0 \mod \xi_1^{|i\delta_{k+1}| - |i\delta_k|};$$

mais d'après (11 a) du chapitre précédent la différence

$$|i\delta_{k+1}| - |i\delta_k| = \varepsilon_k^{(i)}$$

est généralement nulle, et égale à l'unité dans le cas seul où le produit $i\delta_k$ est lui-même un nombre entier, c'est à dire où i est un multiple du dénominateur de la fraction δ_k. D'après cela nous obtenons comme conditions nécessaires et suffisantes de divisibilité de w par $\xi_1^{\delta_{k+1}}$ les congruences suivantes linéaires, simples, pour le module ξ_1,

$$\overline{S}_i^{(i-1)}(v_1, v_2, \ldots, v_\nu) \equiv 0 \mod \xi_1, \tag{8}$$

parmi lesquelles on ne devra maintenant prendre que les sommes de puissances $S(w^i)$ dont l'indice i est un multiple du dénominateur δ_k.

Les dérivées $S_i^{(i-1)}(v_1, \ldots, v_\nu)$ sont des fonctions de (ξ_1, ξ_2) homogènes dont les coefficients sont des fonctions linéaires et homogènes de $(v_1, v_2, \ldots, v_\nu)$ à coefficients constants. Celles-ci sont par suite divisibles par ξ_1 dans le cas seul où les constantes $v_1, \ldots, v_\nu$ sont déterminées de façon que le membre indépendant de ξ_1 dans $\overline{S}_i^{(i-1)}$ s'annule, ou, ce qui revient au même, de façon que $\overline{S}_i^{(i-1)}(v_1, \ldots, v_\nu | \xi_1, \xi_2)$ se réduise à zéro pour $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$. Si donc on désigne par

$$\overline{S}_i^{(i-1)}(v_1, v_2, \ldots, v_\nu) | 0, 1)$$

la fonction homogène et linéaire de $v_1, \ldots, v_\nu$ à coefficients *constants* dans laquelle $\overline{S}_i^{(i-1)}(\xi_1, \xi_2)$ se transforme pour $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$, il résulte finalement que w est algébriquement divisible non seulement par $\xi_1^{\gamma_k}$ mais encore par $\xi_1^{\gamma_{k+1}}$ dans le cas seul où les ν constantes satisfont aux équations linéaires et homogènes à coefficients constants, savoir:

$$\overline{S}_i^{(i-1)}(v_1, v_2, \ldots, v_\nu | 0, 1) = 0. \tag{9}$$

Une autre réduction très-considérable de ces équations qu'il est également important de connaître, sera donnée dans le chapitre prochain.

Pour la suite, nous allons formuler dans le théorème suivant le résultat obtenu jusqu'à présent.

Soient $(e_1, e_2, \ldots, e_\nu)$ ν fonctions indépendantes, homogènes, algébriques et entières, qui toutes sont algébriquement divisibles par la puissance fractionnaire $\xi_1^{\gamma_k}$ d'un facteur linéaire, la fonction

$$w = v_1 e_1 + \ldots + v_\nu e_\nu$$

n'est algébriquement divisible par la puissance fractionnaire $\xi_1^{\gamma_{k+1}}$ immédiatement supérieure que dans le cas seul où les ν constantes $(v_1, \ldots, v_\nu)$ satisfont à un nombre d'équations homogènes, linéaires, à coefficients constants:

$$\begin{aligned} A_1 &= a_{11} v_1 + \ldots + a_{1\nu} v_\nu = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_r &= a_{r1} v_1 + \ldots + a_{r\nu} v_\nu = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

dont l'expression détaillée est donnée par (9) et dont le nombre soit égal à r.

Un tel système de r équations linéaires et homogènes à ν inconnues peut maintenant être résolu très aisément. Dans ce but formons avec les coefficients

$$(10\,a) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1\nu} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2\nu} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{r\nu} \end{vmatrix} = (a_{ik}),$$

tous les déterminants de degré le plus élevé (donc ici dans l'hypothèse $r \geqq \nu$, de degré ν) et cherchons si l'un d'eux au moins est différent de zéro. S'ils sont tous nuls qu'on examine tous les déterminants de degré immédiatement inférieur, et qu'on continue ainsi jusqu'à ce qu'on tombe sur un déterminant différent de zéro. Soient donc les déterminants mineurs d'ordre $(\nu - \nu_1)$ les premiers qui ne soient pas tous nuls, on dit alors que le système des coefficients (a_{ik}) dans (10 a) est de rang $(\nu - \nu_1)$. Dans ces hypothèses nous supposerons que $A_1, A_2, \ldots, A_r$ désignent les premiers membres des équations (9) dans un ordre tel que le système des coefficients des $(\nu - \nu_1)$ premières contienne un de ces déterminants différents de zéro. On sait qu'alors tout le système (10) des r équations linéaires est absolument équivalent au système

$$(10\,b) \qquad A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \ldots, A_{\nu-\nu_1} = 0,$$

de ses $(\nu - \nu_1)$ premières équations qui peuvent par suite le remplacer. Car on peut exprimer le second membre A_ρ de toutes les autres équations en fonction linéaire et homogène de $A_1, A_2, \ldots, A_{\nu-\nu_1}$, sous la forme

$$A_\rho = \alpha_1^{(\rho)} A_1 + \ldots + \alpha_{\nu-\nu_1}^{(\rho)} A_{\nu-\nu_1},$$

donc toutes les expressions telles que A_ρ s'annuleront dès que $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ auront été choisis de façon à annuler simultanément $A_1, \ldots, A_{\nu-\nu_1}$.

Considérons maintenant le système d'équations (10 b), nous pouvons et voulons dès le début désigner par $v_1, \ldots, v_\nu$ les inconnues ordonnées de manière que le déterminant d'ordre $(\nu - \nu_1)$ différent de zéro que contient par hypothèse le système des coefficients

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\nu} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu-\nu_1,1} & \dots & a_{\nu-\nu_1,\nu} \end{pmatrix}$$

soit le déterminant formé des $(\nu - \nu_1)$ *dernières* colonnes verticales du système, c'est à dire celui qui est formé des coefficients de

$$v_{\nu_1+1}, v_{\nu_1+2}, \dots, v_\nu.$$

Dès lors on peut, comme on sait, résoudre entièrement ces $(\nu - \nu_1)$ équations de telle façon que les $(\nu - \nu_1)$ dernières inconnues soient exprimées en fonction linéaire et homogène des ν_1 premières $(v_1, \dots, v_{\nu_1})$. On obtient alors des expressions de la forme

$$(11) \qquad v_{\nu_1+i} = \alpha_{i1} v_1 + \alpha_{i2} v_2 + \dots + \alpha_{i\nu_1} v_{\nu_1}, \qquad (i = 1, 2, \dots, (\nu - \nu_1))$$

où les coefficients α_{ik} sont des constantes, et ces équations donnent pour des valeurs arbitraires de $v_1, \dots, v_{\nu_1}$ la solution la plus générale des équations (10).

Si maintenant on remplace dans la fonction w que nous étudions les constantes $(v_{\nu_1+1}, \dots, v_\nu)$ par leur valeur en $(v_1, \dots, v_{\nu_1})$ d'après (11), on obtient pour w une fonction de $(v_1, \dots, v_{\nu_1})$ linéaire et homogène dont les coefficients sont des fonctions de $(e_1, \dots, e_\nu)$ linéaires et homogènes à coefficients constants. Désignons-les maintenant par $(e'_1, e'_2, \dots, e'_{\nu_1})$, on obtient alors par la substitution (11) w sous la forme

$$(12) \qquad w = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_\nu e_\nu = v_1 e'_1 + v_2 e'_2 + \dots + v_{\nu_1} e'_{\nu_1},$$

et notre théorème apprend maintenant que w est algébriquement divisible par $\xi_1^{\eta_k+1}$ dans le cas seul où dans la deuxième expression de w $v_1, \dots, v_{\nu_1}$ sont pris arbitrairement, c'est à dire dans le cas seul où w est une fonction des ν_1 nouveaux éléments

$$e'_1, e'_2, \dots, e'_{\nu_1},$$

linéaire, homogène à coefficients constants arbitraires. Nous en tirons, comme conséquence immédiate, que ces nouveaux éléments sont eux-mêmes algébriquement divisibles par $\xi_1^{\eta_k+1}$. On reconnaît alors facilement

qu'ils sont également indépendants tout comme $(e_1, \ldots, e_\nu)$ auparavant. En effet s'il existe entre eux une équation

$$\alpha_1 e_1' + \ldots + \alpha_{\nu_1} e_{\nu_1}' = 0,$$

et si on remplace dans (11) $v_1, \ldots, v_{\nu_1}$ respectivement par $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu_1}$, d'où on pourra déduire pour $v_{\nu_1+1}, \ldots, v_\nu$ les valeurs $\alpha_{\nu_1+1}, \ldots, \alpha_\nu$, on obtiendrait alors d'après l'identité (12) l'équation suivante

$$\alpha_1 e_1' + \ldots + \alpha_{\nu_1} e_{\nu_1}' = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_\nu e_\nu = 0$$

équation dans laquelle au moins les ν_1 premiers coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu_1}$ ne s'annulent pas simultanément et qui ne peut exister à cause de l'indépendance de $(e_1, \ldots, e_\nu)$.

On obtient donc enfin le théorème:

Soient

$$e_1, e_2, \ldots, e_\nu,$$

ν fonctions indépendantes, algébriques et entières de même degré, toutes algébriquement divisibles par $\xi_1^{\lambda_k}$. Toutes les fonctions contenues sous la forme

$$w = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_\nu e_\nu,$$

qui contiennent aussi la puissance $\xi_1^{\lambda_k+1}$ immédiatement supérieure et celles-là seulement peuvent être mises sous la forme

$$w' = v_1' e_1' + \ldots + v_{\nu_1}' e_{\nu_1}'$$

$v_1', \ldots, v_{\nu_1}'$ désignant des constantes arbitraires. Ici $e_1', e_2', \ldots, e_{\nu_1}'$ sont ν_1 fonctions indépendantes du faisceau $v_1 e_1 + \ldots + v_\nu e_\nu$ dont les coefficients $(v_1, v_2, \ldots, v_\nu)$ sont déterminés complètement par la résolution complète des équations linéaires et homogènes (9). Si le rang de ces équations linéaires est égal à $\nu - \nu_1$ le nombre de ces fonctions indépendantes e' est précisement égal à ν_1.

A l'aide de ce théorème on peut maintenant arriver facilement à former un système fondamental, comme on va l'exposer dans le paragraphe suivant.

§ 7. *Détermination du système fondamental.*

Nous allons employer maintenant les résultats acquis au chapitre précédent pour passer d'un système arbitraire

$$(1) \qquad \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n,$$

de n fonctions indépendantes, entières et algébriques, à un système fondamental. Nous ferons cependant tout d'abord l'hypothèse suivante sur le système choisi, que

$$(1\text{ a}) \qquad \eta_1 = 1$$

est son premier élément; cette hypothèse se trouve remplie par exemple dans le premier système qui se présente à savoir:

$$(1\text{ b}) \qquad 1, \eta, \eta^2, \ldots, \eta^{n-1}.$$

Puis dès le début nous supposerons que le produit de deux quelconques des éléments $\eta_1, \ldots, \eta_n$ peut être exprimé en fonction linéaire et homogène de ces éléments à l'aide de coefficients *entiers*. Nous admettons donc que dans chacune des équations

$$\eta_i \eta_k = a_1^{(i,k)} \eta_1 + a_2^{(i,k)} \eta_2 + \ldots + a_n^{(i,k)} \eta_n$$

les n coefficients $a_h^{(i,k)}$ sont non seulement des fonctions homogènes et *fractionnaires* de (x_1, x_2) comme c'est toujours le cas, mais encore des fonctions *entières* de ces mêmes variables. Si ce n'était pas là le cas, on pourrait en effet remplacer facilement le système (1) par un autre *dont le degré total serait moindre* et qui possèderait la propriété requise. Car chacun des produits $\eta_i \eta_k$ est, de même que chacun de ses facteurs, algébriquement entier; et quand une pareille fonction entière représentée par le système (1) contient un dénominateur, on peut, par un procédé indiqué et exposé au § 3, remplacer ce système par un autre dont le degré total est inférieur. Si ce dernier système ne possède pas lui-même cette propriété on peut, en opérant toujours de même, continuer à réduire le

degré du système, et ne cesser que lorsqu'on aura obtenu finalement un système ayant la propriété requise; par ce procédé on doit nécessairement arriver à un tel système, parce que le degré total de ces systèmes ne peut pas devenir moindre que zéro.

On reconnaît aisément que le système particulier (1 b) satisfait aussi à cette seconde condition, car chacun des produits $\eta^i\eta^k = \eta^{i+k}$ ou bien se présente lui-même parmi les éléments du système, ou bien peut être exprimé à l'aide de l'équation du n^e degré en η comme fonction entière de η de degré moindre que n et à coefficients entiers.

Soient maintenant:

$$w = u_1\eta_1 + \cdots + u_n\eta_n,$$
$$w' = u_1'\eta_1 + \cdots + u_n'\eta_n,$$

deux fonctions du genre $G(x_1, x_2, \eta)$ dont les coefficients u_i et u_k' sont des fonctions entières de (x_1, x_2) et exprimons le produit

$$ww' = \Sigma\Sigma u_i u_k' \eta_i \eta_k$$

linéairement par $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ sous la forme

$$ww' = U_1\eta_1 + \ldots + U_n\eta_n,$$

il résulte de la propriété attribuée au système $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ que les coefficients $U_1, \ldots, U_n$ eux aussi sont des fonctions *entières* et homogènes de (x_1, x_2). En particulier supposons qu'une fonction entière w soit exprimable au moyen du système $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ et à l'aide de coefficients entiers, il en sera aussi de même pour toutes les puissances $w, w^2, \ldots$ et comme $w^0 = 1$ est aussi exprimable par le même système on peut en dire autant des puissances

$$1, w, w^2, \ldots, w^n, \ldots.$$

Par cette réduction préalable du système qu'on a pris pour base on diminue considérablement, comme nous le montrerons de suite, le nombre des équations à résoudre.

Supposons maintenant qu'on ait commencé par ranger les éléments du système (1) par ordre de grandeur de leurs exposants, de façon que le degré μ du dernier η_n soit le plus grand de tous les degrés.

Nous allons maintenant rechercher à quelles conditions un facteur linéaire ξ_1 doit satisfaire, pour qu'une fonction algébrique

$$u_1\eta_1 + \ldots + u_n\eta_n$$

puisse être algébriquement divisible par ξ_1 sans que ξ_1 soit contenu comme facteur dans tous les coefficients $u_1, \ldots, u_n$.

On va voir qu'il existe un nombre tout à fait limité de facteurs linéaires parfaitement déterminés qui peuvent satisfaire à cette condition.

Soit en effet ξ_1 un tel facteur linéaire et ξ_2 un autre quelconque, différent de celui-ci, introduisons à la place des éléments de degré différent

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}, \eta_n$$

des éléments de même degré,

$$\xi_2^{\lambda_1}\eta_1, \xi_2^{\lambda_2}\eta_2, \ldots, \xi_2^{\lambda_{n-1}}\eta_{n-1}, \eta_n$$

qui, comme précédemment, seront respectivement représentés par

$$(2) \qquad e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n.$$

Nous trouvons qu'il existe une quantité $u_1\eta_1 + \ldots + u_n\eta_n$ divisible par ξ_1 dans le cas seul où on peut déterminer n *constantes,* non toutes nulles, $v_1, v_2, \ldots, v_n$, de façon que la fonction algébrique et entière

$$w = v_1e_1 + v_2e_2 + \ldots + v_ne_n$$

soit également algébriquement divisible par ξ_1.

Si w doit être divisible par ξ_1 cette fonction devra à fortiori contenir la puissance fractionnaire de ξ_1 la plus basse, à savoir la puissance

$$\xi_1^{\delta_1} = \xi_1^{\frac{1}{n}}.$$

Grâce aux considérations générales exposées dans le chapitre précédent on peut maintenant donner sans plus de recherches les conditions nécessaires et suffisantes de divisibilité de w par $\xi_1^{\delta_1}$.

Prenons en effet dans les conditions (5) du chapitre 6 le cas particulier

où $\partial_k = \partial_0 = 0$, et par conséquent $\partial_{k+1} = \partial_1 = \frac{1}{n}$, et remarquons que dans ce cas les n exposants de ξ_1 ont les valeurs

$$\left|\frac{1}{n}\right| = \left|\frac{2}{n}\right| = \ldots = \left|\frac{n}{n}\right| = 1.$$

On obtient le théorème suivant:

La fonction algébrique $w = v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n$ est algébriquement divisible par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$ dans le cas seul où les constantes $v_1, \ldots, v_n$ sont déterminées de façon que les n conditions

$$(3) \qquad \left.\begin{array}{ll} S(w) & \equiv 0 \\ S(ww') & \equiv 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ S(ww' \ldots w^{n-1}) & \equiv 0 \end{array}\right\} \bmod \xi_1$$

soient toutes remplies, en supposant bien entendu que les coefficients $v_1^{(i)}, \ldots, v_n^{(i)}$ des $(n - 1)$ fonctions

$$w^{(i)} = v_1^{(i)} e_1 + \ldots + v_n^{(i)} e_n$$

aient été choisis tout à fait arbitrairement.

Si maintenant on a choisi le système qui sert de base de façon à ce qu'il possède la propriété dont nous avons parlé au début de ce chapitre, les conditions (3) se réduisent considérablement. On peut alors en effet énoncer le théorème important:

La fonction algébrique $w = v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n$ est algébriquement divisible par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$ dans le cas seul où les constantes $v_1, \ldots, v_n$ ont été déterminées de façon que la seule condition

$$(3\,a) \qquad S(ww') \equiv 0 \quad \bmod \xi_1$$

soit remplie pour des valeurs indéterminées des coefficients $v_1', v_2', \ldots, v_n'$.

La condition (3 a) est évidemment nécessaire pour que w soit divisible par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$ puisqu'elle fait partie des conditions nécessaires trouvées dans

(3). Supposons-la remplie maintenant, on démontre alors aisément que $\xi_1^{\frac{1}{n}}$ est aussi algébriquement entier. Supposons en effet que les constantes $v_1, \ldots, v_n$ aient été déterminées d'une façon quelconque de manière que la fonction homogène de (ξ_1, ξ_2) $S(ww')$ soit divisible par ξ_1 pour des valeurs indéterminées de $(v'_1, \ldots, v'_n)$, cette fonction conserve alors cette propriété quand on y suppose $\xi_2 = 1$ et inversement de la divisibilité de cette fonction pour $\xi_2 = 1$ il résulte qu'elle contient aussi le facteur linéaire ξ_1 pour une valeur arbitraire de ξ_2, puisque dans ce cas le terme constant, c'est à dire indépendant de ξ_1, disparaît. Mais si on pose $\xi_2 = 1$ dans $S(ww')$ le système $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ se transforme en $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, et la condition (3 a) est évidemment remplie dans le cas seul où

$$S(ww') \equiv 0 \mod \xi_1$$

quand on prend $\xi_2 = 1$ et quand on a

$$w = v_1\eta_1 + \ldots + v_n\eta_n; \qquad w' = v'_1\eta_1 + \ldots + v'_n\eta_n.$$

Si cette condition est remplie et si on pose successivement

$$w' = 1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}$$

elle reste toujours vérifiée, puisque, d'après le théorème précédent, ces n puissances peuvent se mettre sous la forme $(v'_1\eta_1 + \ldots + v'_n\eta_n)$ avec des coefficients fonctions de (ξ_2, ξ_1) *entières* et homogènes, ou, pour $\xi_2 = 1$, fonctions *entières* de ξ_1. Mais si on prend pour w' successivement une de ces n puissances de w on obtient les n congruences

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = S(w) \equiv 0 \\ S_2 = S(w^2) \equiv 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ S_n = S(w^n) \equiv 0 \end{array}\right\} \mod \xi_1$$

en posant $\xi_2 = 1$ dans ces expressions.

Maintenant w étant algébriquement entier et par suite les $S(w^i)$ fonctions de (ξ_1, ξ_2) *entières* et homogènes, il s'en suit qu'elles sont dès

lors divisibles par le facteur linéaire ξ_1, même lorsqu'on ne prend pas ξ_2 égal à l'unité.

Si on compare ces conditions avec celles trouvées au chapitre 6 dans (5 a) en y supposant $\delta_{k+1} = \delta_1 = \frac{1}{n}$ et si on remarque que dans ce cas chacun des exposants $|i\delta_1|$ devient égal à l'unité, on reconnaît que ces conditions étant remplies, w est effectivement algébriquement divisible par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$. Ce qui démontre le théorème.

On peut maintenant montrer facilement qu'en général on ne peut satisfaire à la condition

$$(5) \qquad S(ww') \equiv 0 \pmod{\xi_1}$$

nécessaire et suffisante pour la divisibilité de w par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$ qu'en prenant les n coefficients $v_1, \ldots, v_n$ de w tous égaux à zéro, et qu'on doit choisir le facteur linéaire ξ_1 d'une façon tout à fait déterminée si on veut satisfaire à cette condition par une valeur de ξ_1 qui ne soit pas identiquement nulle. Si on remarque en effet, que la fonction $S(ww')$ n'est divisible par ξ_1 que dans le cas seul où elle s'annule lorsqu'on pose

$$\xi_1 = 0, \qquad \xi_2 = 1,$$

on peut écrire, d'après une notation facile à saisir, la condition (5) comme il suit

$$(5\text{ a}) \qquad S(ww' \,|\, 0, 1) = 0.$$

Si on prend $\xi_2 = 1$ les n quantités $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ coïncident alors respectivement avec $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ et cette équation (5 a) se transforme en la suivante:

$$(5\text{ b}) \qquad S((v_1\eta_1 + \cdots + v_n\eta_n)(v'_1\eta_1 + \cdots + v'_n\eta_n) \,|\, 0, 1) = 0.$$

Comme enfin cette équation doit subsister pour des valeurs indéterminées de $(v'_1, \ldots, v'_n)$ il faut que chacun des coefficients de ces n indéterminées s'annule séparement, l'équation (5 b) remplace donc les n équations linéaires et homogènes en $(v_1, \ldots, v_n)$

$$S((v_1\eta_1 + \cdots + v_n\eta_n)\eta_k \,|\, 0, 1) = 0$$

ou en développant

(5 c) $$v_1 S(\eta_1 \eta_k) + v_2 S(\eta_2 \eta_k) + \dots + v_n S(\eta_n \eta_k) = 0$$

quand on y a remplacé partout ξ_1 par zéro et ξ_2 par l'unité. Représentons donc en général les coefficients $S(\eta_i \eta_k)$, qui sont évidemment des fonctions de ξ_1, ξ_2 homogènes et entières, par $a_{ik}(\xi_1, \xi_2)$, c'est à dire posons

(6) $$S(\eta_i \eta_k) = a_{ik}(\xi_1, \xi_2)$$

et pour abréger

(6 a) $$a_{ik}(0, 1) = a_{ik};$$

chacune des équations (5 a) peut s'écrire sous la forme suivante

(7) $$a_{1k} v_1 + a_{2k} v_2 + \dots + a_{nk} v_n = 0$$

les n^2 coefficients (a_{ik}) étant des constantes finies. Un pareil système de n équations linéaires et homogènes peut, comme on le sait, être satisfait par un système de valeurs non toutes nulles $(v_1, \dots, v_n)$ dans le cas seul où son déterminant

$$|a_{ik}| = |a_{ik}(0, 1)|$$

est nul, c'est à dire dans le cas où ξ_1 est un diviseur du déterminant

(8) $$|a_{ik}(\xi_1, \xi_2)| = |S(\eta_i \eta_k)|.$$

On peut montrer d'abord facilement que ce déterminant (8) n'est pas identiquement nul, que par conséquent le système d'équations (5 c) ne possède pas une solution pour tout facteur linéaire ξ_1. Car si tel était le cas, si le déterminant (8) du système d'équations (5 c) s'annulait identiquement on pourrait trouver n fonctions $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de (x_1, x_2) entières, homogènes, et non toutes nulles, telles que ces équations (5 c)

(9) $$\Sigma v_i S(\eta_i \eta_k) = 0, \qquad (k=1, 2, \dots, n)$$

soient satisfaites pour toute valeur de (x_1, x_2). Si, maintenant, on choisit $v_1, \ldots, v_n$ de manière à satisfaire à cette condition, et si on pose

$$w = v_1\eta_1 + \ldots + v_n\eta_n \tag{9 a}$$

ces équations se transforment en les suivantes:

$$S(w\eta_k) = 0, \quad (k=1,2,\ldots,n) \tag{9 b}$$

et si on les multiplie respectivement par les n indéterminées $v'_1, \ldots, v'_n$ et si on en fait la somme, on trouve que la quantité algébrique et entière w, non identiquement nulle, trouvée dans (9 a) devrait posséder la propriété suivante:

$$S(ww') = 0, \tag{10}$$

les coefficients de $w' = v'_1\eta_1 + \ldots + v'_n\eta_n$ étant choisis tout à fait arbitrairement. Si maintenant on prend pour w' dans cette équation successivement les valeurs

$$1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}$$

il résulte d'après (10) que les n premières sommes des puissances semblables de w

$$S(w), S(w^2), \ldots, S(w^n)$$

doivent elles aussi également toutes s'annuler. Soit

$$w^n + u_1 w^{n-1} + \ldots + u_n = 0$$

l'équation de degré n à laquelle satisfait cette quantité w, il résulte des relations déjà trouvées précédemment

$$\lambda u_\lambda + S_1 u_{\lambda-1} + \ldots + S_{\lambda-1}u_1 + S_\lambda = 0 \quad (\lambda=1,2,\ldots,n)$$

que ces n coefficients $u_1, \ldots, u_n$ doivent aussi s'annuler, c'est à dire que l'équation de degré n en w se réduit à

$$w^n = 0, \quad \text{donc} \quad w = 0,$$

ce qui est impossible si $\eta_1, \ldots, \eta_n$ sont linéairement indépendants, puisque

dans $w = v_1\eta_1 + \ldots + v_n\eta_n$ tous les coefficients ne sont pas simultanément nuls.

Le déterminant

$$(11) \qquad D(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = |S(\eta_i\eta_k)|,$$

qui dans la suite portera le nom de discriminant du système $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, est par suite, dans le cas où $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ est un système indépendant, une fonction de (x_1, x_2) non nulle qui, comme on le démontre facilement, est homogène par rapport à ces quantités. Si on remplace en effet dans $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, (x_1, x_2, η) respectivement par $(tx_1, tx_2, t^m\eta)$, en général η_i se transforme en $t^{\mu_i}\eta_i$, $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ étant les degrés respectifs des fonctions homogènes $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Cette même substitution transforme

$$S(\eta_i\eta_k) \quad \text{en} \quad t^{\mu_i+\mu_k}S(\eta_i\eta_k),$$

d'où il résulte que

$$|S(\eta_i\eta_k)| \quad \text{devient} \quad |t^{\mu_i+\mu_k}S(\eta_i\eta_k)|.$$

Mais ce déterminant transformé est égal à

$$t^{2(\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n)}|S(\eta_i\eta_k)|$$

puisque, en général, on peut faire sortir t^{μ_i} de la $i^{\text{ième}}$ ligne et t^{μ_k} de la $k^{\text{ième}}$ colonne. On obtient donc le théorème suivant, d'une grande importance pour ce qui va suivre:

Soit $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ un système de n fonctions indépendantes, entières et homogènes, leur discriminant

$$D(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = |S(\eta_i\eta_k)|$$

est une fonction de (x_1, x_2) entière, homogène, non nulle dont le degré $2N$ est double de celui du système $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$.

Si maintenant $v_1e_1 + \ldots + v_ne_n$ devait être seulement algébriquement divisible par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$ sans que toutes les constantes disparaissent, ξ_1 serait nécessairement un diviseur du discriminant $D(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. En se servant des considérations exposées au commencement de ce chapitre on peut maintenant énoncer ce résultat dans le théorème suivant:

Une fonction entière et homogène

$$w = u_1\eta_1 + \dots + u_n\eta_n$$

peut être algébriquement divisible par une puissance entière ou fractionnaire du facteur linéaire ξ_1 dans le cas seul où ξ_1 est un diviseur de son discriminant $D(\eta_1, \dots, \eta_n)$.

Soit maintenant ξ_1 un des facteurs linéaires du discriminant de $(\eta_1, \dots, \eta_n)$, dont le nombre est égal au double du degré de ce système.

Dans ce cas des valeurs non nulles de $v_1, v_2, \dots, v_n$ peuvent satisfaire à l'équation linéaire (5 a), ou, ce qui revient au même, aux n équations (7) qui sont les conditions nécessaires et suffisantes de la divisibilité de

$$w = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n \tag{11 a}$$

par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$. Si le rang du système de coefficients de ces n équations linéaires

$$\Sigma a_{ik} v_k = 0$$

est égal à $(n - n_1)$, on obtient par leur résolution complète exactement n_1 fonctions du faisceau (11 a)

$$e'_1, e'_2, \dots, e'_{n_1}, \tag{12}$$

indépendantes, entières et algébriques, qui toutes sont elles-mêmes algébriquement divisibles par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$; et le théorème trouvé à la fin du chapitre précédent nous apprend alors que toutes les fonctions du faisceau (11 a) divisibles par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$ et celles-là seules se trouvent comprises dans la formule

$$w' = v'_1 e'_1 + \dots + v'_{n_1} e'_{n_1}, \tag{12 a}$$

$v'_1, \dots, v'_{n_1}$ désignant encore des constantes arbitraires. Si maintenant w doit être algébriquement divisible par ξ_1, il doit à fortiori contenir $\xi_1^{\frac{1}{n}}$ et doit par conséquent avoir la forme w' exprimée par (12 a). Il reste donc a examiner maintenant comment on doit déterminer dans w' les constantes $(v'_1, v'_2, \dots, v'_{n_1})$ de la façon la plus générale de manière que

w' ne soit pas seulement algébriquement divisible par $\xi_1^{\frac{1}{n}} = \xi_1^{\delta_1}$ mais le soit encore par $\xi_1^{\delta_1 \rho} = \xi_1$.

Si tel devait être le cas, w' doit à fortiori contenir la puissance de ξ_1 fractionnaire immédiatement supérieure à δ_1, à savoir $\xi_1^{\delta_2} = \xi_1^{\frac{1}{n-1}}$; nous avons maintenant à examiner de quelle manière les coefficients $v_1', \ldots, v_{n_1}'$ de w' sont à déterminer dans (12 a) pour que w' soit algébriquement divisible non seulement par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$ mais encore par $\xi_1^{\frac{1}{n-1}}$.

D'après (8) du 6e chapitre on ne devra considérer dans ce cas que les dérivées des sommes des puissances semblables $S(w'^i)$ dont l'exposant i est un diviseur du dénominateur de $\delta_1 = \frac{1}{n}$. Ici donc c'est la dernière somme des puissances semblables seule $S(w'^n)$ qui intervient. Mais comme w' est divisible par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$ pour des v_i' indéterminés, $S(w'^n)$ contient ξ_1 lui-même en facteur. Si donc on pose, comme dans (7 a) du 6e chapitre

$$S(w'^n) = \xi_1 \overline{S}_n(v_1', \ldots, v_{n_1}'),$$

et si on désigne de nouveau toutes les dérivées d'ordre $(n-1)$ de cette fonction entière et homogène $\overline{S}_n(v_1', \ldots, v_{n_1}')$ par rapport à ses indéterminées par

$$\overline{S}_n^{(n-1)}(v_1', \ldots, v_{n_1}'),$$

on voit que la fonction w' est algébriquement divisible par $\xi_1^{\frac{1}{n-1}}$ dans le cas seul où ses coefficients $v_1', \ldots, v_{n_1}'$ satisfont aux congruences linéaires et homogènes

$$(13) \qquad \overline{S}_n^{(n-1)}(v_1', \ldots, v_{n_1}') \equiv 0 \pmod{\xi_1},$$

ou, ce qui revient au même, aux équations linéaires

$$(13\text{ a}) \qquad \overline{S}_n^{(n-1)}(v_1', \ldots, v_{n_1}' \mid 0, 1) = 0.$$

Si ce système d'équations (13 a) est de rang $(n_1 - n_2)$ on obtient par sa résolution complète n_2 fonctions e indépendantes

$$(14) \qquad e_1'', \ldots, e_{n_2}''$$

du faisceau w' qui sont toutes divisibles par $\xi_1^{\delta_2}$ et on démontre que toutes

les fonctions du faisceau w' et par suite aussi du faisceau w qui contiennent la même puissance fractionnaire de ξ_1, et elles seules, sont comprises dans l'expression

$$w'' = v_1''e_1'' + \dots + v_{n_2}''e_{n_2}''. \tag{14a}$$

Si on passe de la même façon de δ_2 à δ_3 et ainsi de suite jusqu'à $\delta_\mu = 1$ on arrive finalement au théorème suivant:

Toutes les fonctions du faisceau

$$w = v_1e_1 + v_2e_2 + \dots + v_ne_n$$

qui sont algébriquement divisibles par un facteur linéaire ξ_1, et celles-là seulement, sont exprimables en fonction linéaire et homogène de ν d'entre elles indépendantes

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_\nu$$

avec des coefficients constants, et par suite elles sont comprises dans la forme générale

$$\bar{w} = \bar{v}_1\bar{e}_1 + \dots + \bar{v}_\nu\bar{e}_\nu.$$

Les ν fonctions $(\bar{e}_1, \dots, e_\nu)$ s'obtiennent par la résolution complète d'un certain nombre d'équations linéaires et homogènes, à coefficients constants, qui peuvent être déduites facilement des dérivées des sommes des puissances semblables de w.

Posons maintenant pour les ν fonctions indépendantes *entières* et algébriques $\frac{e_i}{\xi_1}$

$$\frac{\bar{e}_i}{\xi_1} = \bar{\eta}_i; \qquad (i=1,2,\dots,\nu)$$

celles-ci sont toutes des fonctions du genre $G(x_1, x_2, \eta)$ indépendantes et *entières* qui exprimées par le système $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ ou, ce qui revient au même, par le système $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ apparaissent sous forme de fractions ayant ξ_1 en dénominateur. Par la méthode indiquée à la fin du troisième chapitre on peut déduire d'abord de $\bar{\eta}_1$ et $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ un nouveau système d'un degré inférieur d'une unité qui peut exprimer aussi $\bar{\eta}_1$ sans dénominateur. De ce dernier système et de $\bar{\eta}_2$ découlera un nouveau, qui représentera aussi cette fonction sous forme entière. Si

on continue ainsi de suite on finit par trouver un système qui peut exprimer sans aucun dénominateur toutes les ν fonctions indépendantes $(\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_\nu)$. Le degré total de ce système sera au moins inférieur d'une unité à celui de $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Mais comme les ν fonctions $(\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_\nu)$ dont on se sert pour introduire le nouveau système sont indépendantes, on reconnaît très facilement, ce qu'on peut remarquer ici en passant, que le degré du dernier sera exactement inférieur de ν unités à celui du premier. Si on examine ce nouveau système tout comme on l'a fait pour le système primitif, et si on continue ainsi, on arrive finalement à un système dont le degré ne peut plus être abaissé, on obtient donc un système fondamental. Nous venons ainsi d'indiquer un moyen général, pratique et rationnel, qui permet, en partant d'un système arbitraire de fonctions indépendantes $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ d'arriver toujours à un système fondamental par la résolution seule d'équations linéaires.

Nous avons caractérisé un système fondamental

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$$

comme un système de n fonctions indépendantes, entières et algébriques, dont le degré est aussi petit que possible. Si maintenant on forme le discriminant

$$D(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = S(\xi_1 \xi_2),$$

en remarquant qu'il est une fonction de (x_1, x_2) entière et homogène, de degré égal au double de celui du système fondamental, on reconnaît que le système fondamental peut être aussi complètement caractérisé comme un système de n fonctions entières et indépendantes dont le discriminant est de degré aussi petit que possible. En réalité on peut donner à ce théorème une forme qui fait ressortir un rapport beaucoup plus étroit entre le discriminant $D(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ et tous les autres $D(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ du genre $G(x_1, x_2, \eta)$.

Soit en effet $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ un système de n formes arbitraires, entières et algébriques, qui peuvent aussi n'être pas indépendantes les unes des autres, si on remarque que chacun de ses éléments peut être représenté linéairement par le système fondamental à l'aide de coefficients entiers, on obtient n équations de la forme

$$\eta_i = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \zeta_r,$$

les coefficients ($\alpha_{i\tau}$) étant des fonctions *entières* et homogènes de (x_1, x_2). Le déterminant $|\alpha_{i\tau}|$ de la substitution est une fonction entière et homogène de (x_1, x_2) qui s'annule évidemment dans le cas seul où le système $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ n'est pas indépendant; car, c'est alors seulement qu'on peut déterminer n fonctions de (x_1, x_2) non toutes nulles $A_1, \ldots, A_n$ de manière que

$$A_1\eta_1 + \ldots + A_n\eta_n = 0.$$

Il s'en suit

$$\eta_i\eta_k = \sum_{\tau, m}\alpha_{i\tau}\zeta_\tau\zeta_m\alpha_{km}$$

ou en faisant la somme des termes conjuguées

$$S(\eta_i\eta_k) = \sum\alpha_{i\tau}S(\zeta_\tau\zeta_m)\alpha_{km},$$

et en passant aux déterminants on obtient, en mettant deux fois à profit le théorème relatif à la multiplication de deux déterminants, l'équation finale

$$(15)\qquad D(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = |\alpha_{i\tau}|^2 D(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n).$$

D'où le théorème fondamental suivant:

> Le discriminant du système fondamental est un diviseur commun de tous les discriminants de n fonctions quelconques du genre $G(x_1, x_2, \eta)$; et, comme $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ lui-même est un pareil système, ce discriminant est le plus grand commun diviseur de tous ces systèmes.

De l'équation (15) on peut encore déduire que $D(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ s'annule dans le cas seul où les n fonctions $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ ne sont pas indépendantes. On obtient donc le théorème déjà démontré:

> Un système $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ est indépendant dans le cas seul où son discriminant est différent de zéro.

Le système $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ est un système fondamental quand le déterminant $|\alpha_{i\tau}|$ de la substitution est une constante non nulle, car, dans ce cas seul, le système fondamental lui-même peut être exprimé entièrement par $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Puisque dans ce cas seul, comme on l'a déjà vu

plus haut, les discriminants des deux systèmes coïncident eux aussi, à une constante près, on obtient le théorème:

Soit $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ un système fondamental et $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ un autre système de fonctions entières, ce dernier sera également un système fondamental dans le cas seul où son discriminant coïncide, à un facteur constant près, avec $D(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$.

SUR LES CARACTÈRES DE CONVERGENCE DES SÉRIES A TERMES POSITIFS ET SUR LES FONCTIONS INDÉFINIMENT CROISSANTES

PAR

J. HADAMARD
A BORDEAUX.

1. Après avoir établi que dans une série à termes positifs

$$S = \sum^{\infty} u_n \tag{1}$$

le produit nu_n ne pouvait rester fini sans qu'il y eût divergence, les géomètres ont pu chercher pour la convergence d'une telle série une condition nécessaire et suffisante de la forme

$$\lim_{n=\infty} u_n \varphi(n) = 0. \tag{2}$$

Abel a demontré qu'une pareille condition ne saurait être formée, et cela par le théorème suivant:

Il n'existe pas de fonction $\varphi(n)$ telle que la série à termes positifs[1] *$\sum^{\infty} u_n$ soit nécessairement convergente si le produit $u_n\varphi(n)$ tend vers 0 pour n infini, et nécessairement divergente si ce produit conserve une valeur finie.*

Il importe de remarquer que la formation même d'une fonction $\varphi(n)$ satisfaisant aux conditions de cet énoncé ne donnerait pas un caractère nécessaire et suffisant de convergence. En effet le produit $u_n\varphi(n)$ peut

[1] Comme il s'agit exclusivement, dans ce qui suit, de séries à termes positifs, nous négligerons désormais de mentionner cette restriction.

ne vérifier aucune des deux hypothèses précédentes: il peut osciller sans tendre vers aucune limite, la limite inférieure d'indétermination étant o.

En tenant compte de cette remarque, on constate, comme l'a fait voir M. PRINGSHEIM,[1] qu'une égalité de la forme (2) ne peut même pas donner une condition *nécessaire* de convergence (sauf, bien entendu, si $\varphi(n)$ n'est pas infini). C'est ainsi, par exemple, qu'on peut trouver une série convergente ayant une infinité de termes communs avec la série harmonique: il suffit que les indices de ces termes soient en progression géométrique, les termes intermédiaires étant ceux d'une série convergente quelconque.

Comme cependant ces cas d'oscillation ne se présentent pas dans la plupart des applications, nous nous en tiendrons au point de vue d'ABEL. Le théorème précédemment énoncé revient au fond à celui-ci: *Si peu divergente que soit une série, on peut multiplier ses termes successifs par des nombres infiniment petits sans troubler la divergence.*

DU BOIS REYMOND[2] a complété ce théorème par le suivant:

Si peu convergente que soit une série, on peut multiplier ses termes par des nombres indéfiniment croissants sans troubler la convergence.

Il est à remarquer que ce dernier donne la réponse à une question analogue à celle que s'est posée ABEL. On en déduit en effet qu'*il n'existe pas de fonction $\varphi(n)$ telle que la série $\sum^{\infty} u_n$ soit nécessairement divergente si le produit $\varphi(n)u_n$ augmente indéfiniment, et nécessairement convergente si ce produit reste fini.*

2. Les théorèmes précédents reviennent au fond à cette remarque:

On peut toujours trouver une série plus lentement convergente qu'une série convergente donnée et une série plus lentement divergente qu'une série divergente donnée.

---

[1] *Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern,* Math. Annalen, t. 35, p. 344—350; 1890.

[2] *Über Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern,* Crelle's Journal, t. 76, p. 85; 1873.

Sous cette forme ils sont pour ainsi dire intuitifs. M. PRINGSHEIM a même donné une méthode générale pour former, avec un certain degré d'arbitraire, des séries de plus en plus lentement convergentes ou divergentes.

Si l'on n'a en vue que l'existence de ces séries, on peut particulariser la valeur de l'exposant ρ qui figure dans ses recherches (ou de l'exposant analogue μ de DU BOIS-REYMOND) et réduire la démonstration à la forme simple suivante:

Théorème (a). *Si peu divergente que soit une série, on peut toujours multiplier ses termes successifs par les valeurs correspondantes d'une quantité infiniment décroissante* $\frac{1}{P(n)}$ *de façon à former une nouvelle série elle-même divergente.*

En effet la somme S_n des n premiers termes de la série (1) augmentera indéfiniment avec n et l'on aura $u_n = S_{n+1} - S_n$.

En multipliant u_n par la quantité (infiniment petite pour n infini) $\frac{1}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n+1}}}$, on aura donc la série divergente $\Sigma(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$.

Théorème (A). *Il n'existe pas de fonction* $\varphi(n)$ *telle que la série* (1) *soit nécessairement convergente si le produit* $u_n\varphi(n)$ *tend vers* 0 *et nécessairement divergente si ce produit reste supérieur à un nombre fixe.*

Car si $\varphi(n)$ jouit de la seconde propriété, la série $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ est divergente et nous pouvons multiplier ses termes par des nombres infiniment petits sans la rendre convergente. La première propriété n'est donc pas vérifiée.

Théorème (b). *Si peu convergente que soit une série, on peut multiplier ses termes par les valeurs correspondantes d'une quantité* Q_n *indéfiniment croissante sans troubler la convergence.*

En effet le reste r_n tendra vers 0, et la série pourra s'écrire

$$\Sigma u_n = \Sigma(r_n - r_{n+1}).$$

En multipliant u_n par la quantité indéfiniment croissante $\frac{1}{\sqrt{r_n}+\sqrt{r_{n+1}}}$, on obtiendra donc la nouvelle série convergente $\Sigma(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+1}})$.

Théorème (B). *Il n'existe pas de fonction $\varphi(n)$ telle que la série Σu_n soit nécessairement convergente si le produit $\varphi(n)u_n$ reste fini et nécessairement divergente si ce produit augmente indéfiniment.*

En effet, si $\varphi(n)$ jouit de la première propriété, la série $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ est convergente et nous pourrons multiplier ses termes par des nombres infiniment croissants sans la rendre divergente. La fonction $\varphi(n)$ ne satisfait donc pas à la seconde condition.

3. Nous avons particularisé, dans la démonstration des théorèmes (a) et (b), la méthode de formation des nouvelles séries remplissant les conditions des énoncés. On peut au contraire laisser à cette formation toute la généralité possible.

Dans le premier cas (théorème (a)), les deux séries, au lieu d'être liées par la relation

$$S'_n = \sqrt{S_n},$$

où S'_n est la quantité analogue à S_n formée dans la seconde série, pourront être liées par une relation quelconque de la forme

$$S'_n = V(S_n),$$

où $V(x)$ sera une fonction infinie lorsque x est infini, mais dont la dérivée devient en même temps nulle. Car alors on aura bien

$$\frac{u'_n}{u_n} = \frac{S'_n - S'_{n-1}}{S_n - S_{n-1}} = V'(\Sigma), \qquad S_{n-1} < \Sigma < S_n$$

et par conséquent $\frac{u'_n}{u_n} = 0$, pour $n = \infty$.

Pourra d'ailleurs être prise pour fonction V la fonction inverse de toute fonction continue et constamment croissante qui augmente indéfiniment aussi que sa dérivée lorsque x augmente indéfiniment, comme c'est le cas pour x^ρ (si $\rho > 1$), pour e^x, pour $e^{e^{\cdot^{\cdot^{e^x}}}}$ etc. C'est ainsi que x^ρ (avec $\rho < 1$),

$\log x$, $\log.\log\ldots\log x$ donnent des types de fonctions V, ceux-là même qui ont été utilisés par M. Prinsgheim.

Dans le second cas, celui du théorème (b), au lieu de définir la nouvelle série par la relation

$$r'_n = \sqrt{r_n},$$

on pourra prendre

$$r'_n = V(r_n)$$

où $V(x)$ sera une fonction qui s'annulle avec x pendant que sa dérivée devient infinie pour la même valeur de la variable, autrement dit, l'inverse d'une fonction nulle ainsi que sa dérivée pour $x = 0$ (par exemple de x^ρ, pour $\rho > 1$, de $e^{-\frac{1}{x}}$, etc.).

Moyennant cette condition, le rapport

$$\frac{u'_n}{u_n} = \frac{r'_n - r'_{n+1}}{r_n - r_{n+1}} = V'(R), \qquad (r_{n+1} < R < r_n)$$

sera bien infini avec n.

4. Pour toute série donnée, on peut former, comme nous l'avons dit, les fonctions $P(n)$ ou $Q(n)$ des théorèmes (a), (b). Mais, une fonction indéfiniment croissante quelconque étant donnée, on peut toujours trouver une série assez peu divergente (ou convergente) pour que la fonction ne puisse pas être prise pour la fonction $P(n)$ (ou $Q(n)$). On a en effet la proposition suivante, aussi implicitement contenue dans les résultats de MM. Du Bois-Reymond et Pringsheim.

Théorème (c). *Une fonction indéfiniment croissante quelconque $F(n)$ étant donnée, on peut trouver deux séries, l'une convergente, l'autre divergente, telles que le rapport des termes correspondants soit $F(n)$.*

Supposons en effet la fonction F constamment croissante et appliquons à la série $\sum_n^\infty \left(\frac{1}{F(n-1)} - \frac{1}{F(n)}\right)$ le théorème (b). Nous aurons une fonction indéfiniment croissante $Q(n-1)$ telle que la série

$$\sum \left[Q(n-1)\left(\frac{1}{F(n-1)} - \frac{1}{F(n)}\right)\right] = \sum \left[\frac{Q(n-1)}{F(n-1)} - \frac{Q(n)}{F(n)}\right] + \sum \left[\frac{Q(n) - Q(n-1)}{F(n)}\right]$$

soit convergente.

Or la série $\sum\left[\frac{Q(n-1)}{F(n-1)}-\frac{Q(n)}{F(n)}\right]$ peut être supposée convergente, car on peut faire croître Q aussi lentement qu'on veut, et en particulier plus lentement que F. Dans ces conditions, les deux séries $\sum(Q(n)-Q(n-1))$ et $\sum\frac{Q(n)-Q(n-1)}{F(n)}$ répondent à la question.

5. Nous avons supposé que la fonction F était constamment croissante. On peut en effet ramener le cas le plus général à celui-là en remplaçant la fonction F par une autre constamment croissante qui lui soit toujours au plus égale. Pour cela, après avoir représenté la suite des valeurs de $F(n)$ par des points ayant ces valeurs pour ordonnées et les valeurs correspondantes de n pour abscisses, il suffira d'entourer inférieurement cette figure d'une sorte de polygone de NEWTON analogue à celui que j'ai utilisé dans un travail précédent,[1] avec cette seule différence que ce polygone ne sera pas assujetti à la condition d'être convexe, mais seulement de n'avoir aucun côté à coefficient angulaire négatif.

Analytiquement, cela s'exprimera ainsi: la fonction F, étant infinie pour n infini, doit prendre une valeur $u_0 = F(n_0)$ plus petite que toutes les autres. De $n = 0$ à $n = n_0$, nous remplacerons les valeurs de F par d'autres qui aillent constamment en croissant et dont la dernière soit u_0. Soit ensuite $u_1 = F(n_1)$ la plus petite des valeurs de F correspondantes à $n > n_0$; de $n = n_0$ à $n = n_1$, nous remplacerons les valeurs de F par d'autres constamment croissantes de u_0 à u_1, par conséquent au plus égales aux valeurs données, et ainsi de suite.

Si nous voulons que F soit croissant au sens le plus strict du mot, c'est-à-dire ne puisse jamais rester constante pour une série de valeurs de n, il faudra, lorsque à une même valeur u_i correspondent plusieurs valeurs de n, avoir soin de prendre pour n_i la plus grande de ces dernières.

Ayant ainsi déterminé une fonction auxiliaire F' toujours au plus égale à F, mais croissante, nous pourrons opérer comme il a été dit sur cette dernière fonction. Quand nous aurons formé la série convergente

---

[1] *Etude sur les propriétés des fonctions entières*, Journal de Liouville, 4e série, tome 9, p. 174; 1893.

Σu_n telle que $\Sigma u_n F'(n)$ soit divergente, la série $\Sigma u_n F(n)$ le sera à plus forte raison.

6. Si d'une série convergente (ou divergente) on en déduit une seconde plus lentement convergente (ou divergente) que la première, de celle-ci une troisième, et aussi de suite, on peut obtenir une infinité de séries pourrant servir à juger par comparaison de la convergence ou de la divergence d'une série donnée.

C'est à cette classe de caractères qu'appartient le critérium dit *logarithmique* établi par MM. BERTRAND et BONNET, et dans lequel on avait cru voir une règle de convergence applicable à tous les cas. MM. DU BOIS-REYMOND [1] et PRINGSHEIM [2] ont réfuté cette erreur et formé des séries tant convergentes que divergentes pour laquelles le critérium logarithmique ne donnait aucun résultat.

7. Cette insuffisance n'est point particulière au critérium logarithmique. Nous allons constater qu'il ne faut pas plus espérer obtenir un critérium général à l'aide d'une infinité de séries de comparaison qu'à l'aide d'une seule.

Prenant, par exemple, en premier lieu, le cas de la divergence, nous allons démontrer qu'*étant donnée une infinité de séries divergentes, on peut former une nouvelle série divergente ayant ses termes à la longue plus petits et même infiniment plus petits que n'importe quelle des premières.*

Toutefois nous avons une restriction indispensable à faire; car on peut trouver deux séries divergentes telles que toute série ayant ses termes plus petits que les termes correspondants de chacune de ces deux soit nécessairement convergente. Il suffira, par exemple, de prendre comme termes de rang pair, dans la première série, les termes successifs d'une série divergente, comme termes de rang impair ceux d'une série convergente et de faire l'inverse dans la seconde série. Nous supposerons en conséquence que la suite des termes qui se correspondent dans les séries successives soit constamment décroissante, de sorte que l'énoncé à démontrer sera le suivant:

---

[1] DU BOIS REYMOND, loc. cit., p. 88—91.

[2] PRINGSHEIM, loc. cit., p. 351—355.

Théorème (α). *Etant données des séries divergentes*

$$S^{(1)} = u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \dots + u_n^{(1)} + \dots,$$
$$S^{(2)} = u_0^{(2)} + u_1^{(2)} + \dots + u_n^{(2)} + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S^{(P)} = u_0^{(P)} + u_1^{(P)} + \dots + u_n^{(P)} + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

en nombre infini, et telles que, pour une même valeur de n, *les* $u_n^{(P)}$ *aillent en décroissant quand* P *augmente, on peut toujours trouver une série plus lentement divergente que n'importe laquelle des premières, et cela de manière que le rapport des termes correspondants tende vers* o.

Soit en effet $S_n^{(P)}$ la somme des n premiers termes de la série $S^{(P)}$, laquelle va en augmentant indéfiniment avec n. Prenons une suite de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_P, \dots$ indéfiniment croissants et nommons n_1 la plus petite valeur de n telle que $S_n^{(1)} \geqq \alpha_1$; n_2 la plus petite valeur de n (au moins égale à n_1), telle que $S_n^{(2)} \geqq \alpha_2$; en général, n_P la plus petite valeur de n telle que $S_n^{(P)} \geqq \alpha_P$.

Nous poserons, tout d'abord, pour $n < n_1$,

$$w_n = u_n^{(1)}.$$

Puis l'inégalité

$$S_{n_2}^{(2)} - S_{n_1}^{(1)} < S_{n_2}^{(1)} - S_{n_1}^{(1)}$$

nous montre que la différence $S_{n_2}^{(2)} - S_{n_1}^{(1)}$ peut être décomposée en $n_2 - n_1$ parties plus petites respectivement que $u_{n_1}^{(1)}, u_{n_1+1}^{(1)}, \dots, u_{n_2-1}^{(1)}$. Ce sont ces parties que nous prendrons pour valeurs successives de w_n, de $n = n_1$ à $n = n_2$ exclusivement.

En général, nous remarquerons que l'on a

$$S_{n_{P+1}}^{(P+1)} - S_{n_P}^{(P)} < S_{n_{P+1}}^{(P)} - S_{n_P}^{(P)}$$

et nous diviserons le premier membre en $n_{P+1} - n_P$ parties $w_{n_P}, w_{n_P+1}, \dots, w_{n_{P+1}}$ respectivement inférieures aux parties $u_{n_P}^{(P)}, u_{n_P+1}^{(P)}, \dots, u_{n_{P+1}-1}^{(P)}$ du second.

La série Σw_n ainsi constituée satisfait bien aux conditions de l'énoncé. Elle est manifestement divergente, puisque parmi les valeurs successives

de la somme de ses n premiers termes se trouvent les valeurs $S^{(1)}_{n_1}$, $S^{(2)}_{n_2}$, $\ldots$, $S^{(P)}_{n_P}$, $\ldots$, respectivement supérieures à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_P, \ldots$ et par suite indéfiniment croissantes. D'ailleurs, à partir de $n = n_P$, on a bien $w_n < u^{(P)}_n$.

8. Si toutefois le rapport $\frac{w_n}{u^{(P)}_n}$ ne tendait pas vers o, il suffirait d'appliquer à la série w_n le théorème (a). Mais cette dernière particularité ne peut se produire que dans les cas peu intéressants où le rapport $\frac{u^{(P)}_n}{u^{(q)}_n}$ $(q > P)$ n'augmente pas indéfiniment. D'ailleurs on peut toujours écarter cette hypothèse en multipliant (ce qui est évidemment indifférent dans la question actuelle) chaque série $S^{(P)}$ par un nombre déterminé, mais variable avec P et tendant vers o quand P augmente indéfiniment.

9. **Théorème** ($\mathfrak{A}$). *Il est impossible de trouver une suite infinie de fonctions* $\varphi^{(1)}(n), \varphi^{(2)}(n), \ldots, \varphi^{(P)}(n), \ldots$ *telles que la serie* Σu_n *soit nécessairement convergente si, quel que soit* P, *le produit* $u_n \varphi^{(P)}(n)$ *tend vers* o *pour* n *infiniment grand, et nécessairement divergente si, à partir d'une certaine valeur de* P, *ce même produit reste supérieur à un nombre fixe quand* n *augmente indéfiniment. Du moins, ces fonctions ne peuvent exister sous la condition que* $\varphi^{(P)}(n)$ *soit constamment croissant avec* P, *quand* n *reste invariable.*[1]

En effet si les fonctions $\varphi^{(P)}(n)$ vérifiaient la seconde condition de

[1] Le cas où les fonctions $\varphi^{(P)}(n)$ ne rempliraient pas cette dernière condition n'offre évidemment aucun intérêt. En effet remplaçons chaque valeur $\varphi^{(P)}(n)$ par la plus grande valeur que prenne $\varphi^{(p)}(n)$ pour $p \leq P$. Si les séries $\sum \frac{1}{\varphi^{(P)}(n)}$ restent encore toutes divergentes, on est ramené au cas traité dans le texte. Si au contraire, pour une certaine valeur P_0 de P, on a une série convergente σ, les fonctions $\varphi^{(P)}$ ne pourront pas servir à juger de la convergence d'une série moins convergente que σ, puisqu'alors le produit $u_n \varphi^{(P)}(n)$ devra, pour une même valeur de n, prendre une infinité de valeurs infiniment petites (sans quoi la série Σu_n serait divergente à cause de la divergence de $\sum \frac{1}{\varphi^{(P)}(n)}$) et une infinité de valeurs supérieures à un nombre déterminé quelconque (sans quoi la série Σu_n serait au moins aussi convergente que σ).

l'énoncé, les séries $\sum \frac{1}{\varphi^{(P)}(n)}$ seraient divergentes, et par suite on pourrait en déduire une série Σw_n encore divergente et telle que le rapport $\frac{w_n}{\left(\frac{1}{\varphi^{(P)}(n)}\right)}$ tende vers o, quel que soit P.

10. **Théorème** (β). *Etant données des séries convergentes*

$$S^{(1)} = u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + u_2^{(1)} + \ldots + u_n^{(1)} + \ldots,$$
$$S^{(2)} = u_0^{(2)} + u_1^{(2)} + u_2^{(2)} + \ldots + u_n^{(2)} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S^{(P)} = u_0^{(P)} + u_1^{(P)} + u_2^{(P)} + \ldots + u_n^{(P)} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

en nombre infini et telles que, pour une même valeur de n, $u_n^{(P)}$ soit croissant avec P, on peut trouver une série plus lentement convergente que n'importe laquelle des premières, et cela de manière que le rapport des termes correspondants soit infini avec n.

Désignant par $r_n^{(P)}$ le reste de la $P^{\text{ième}}$ série arrêtée au $n^{\text{ième}}$ terme, prenons une suite de nombres positifs $\beta_2, \ldots, \beta_P, \ldots$ constamment et indéfiniment décroissants.

Soit n_2 un entier tel que $r_{n_2}^{(2)}$ soit au plus égal à β_2. Pour $n < n_2$, nous poserons $w_n = u_n^{(1)}$.

Soit ensuite n_3 un entier (nécessairement plus grand que n_2) satisfaisant aux deux conditions

$$r_{n_3}^{(3)} \leqq \beta_3; \qquad r_{n_3}^{(3)} - r_{n_3}^{(1)} < r_{n_2}^{(2)} - r_{n_2}^{(1)}$$

ce qui est possible puisque les premiers membres de ces deux inégalités tendent vers o pour n_3 infini. Nous pourrons diviser la différence $r_{n_2}^{(2)} - r_{n_3}^{(3)}$, plus grande que $r_{n_2}^{(1)} - r_{n_3}^{(1)} = u_{n_2}^{(1)} + u_{n_2+1}^{(1)} + \ldots + u_{n_3-1}^{(1)}$, en $n_3 - n_2$ parties $w_{n_2}, w_{n_2+1}, \ldots, w_{n_3-1}$ plus grandes respectivement que $u_{n_2}^{(1)}, u_{n_2+1}^{(1)}, \ldots, u_{n_3-1}^{(1)}$.

Nous appellerons ensuite n_4 un entier (nécessairement plus grand que n_3) satisfaisant aux conditions

$$r_{n_4}^{(4)} \leqq \beta_4; \qquad r_{n_4}^{(4)} - r_{n_4}^{(2)} < r_{n_3}^{(3)} - r_{n_3}^{(2)}$$

et, en général, ayant obtenu n_P, nous en déduirons n_{P+1} par les conditions

$$r_{n_{P+1}}^{(P+1)} \leqq \beta_{P+1}; \qquad r_{n_{P+1}}^{(P+1)} - r_{n_{P+1}}^{(P-1)} < r_{n_P}^{(P)} - r_{n_P}^{(P-1)},$$

après quoi nous pourrons diviser la différence $r_{n_P}^{(P)} - r_{n_{P+1}}^{(P+1)}$, plus grande que $r_{n_P}^{(P-1)} - r_{n_{P+1}}^{(P-1)}$, en $n_{P+1} - n_P$ parties $w_{n_P}, w_{n_P+1}, \ldots, w_{n_{P+1}-1}$, respectivement supérieures à $u_{n_P}^{(P-1)}, u_{n_P+1}^{(P-1)}, \ldots, u_{n_{P+1}-1}^{(P-1)}$.

Continuant ainsi indéfiniment, nous formerons une série Σw_n manifestement convergente (puisqu'elle se réduit à $S_{n_2}^{(2)} + (r_{n_2}^{(2)} - r_{n_3}^{(3)}) + (r_{n_3}^{(3)} - r_{n_4}^{(4)}) + \ldots$, les nombres $r_{n_P}^{(P)}$ tendant vers o) et dont les termes, à partir de $n = n_{P+1}$, seront plus grands que les termes correspondants de la série $S^{(P)}$.

Comme précédemment, si le rapport $\frac{w_n}{u_n^{(P)}}$ n'augmentait pas indéfiniment, on appliquerait à la série Σw_n le théorème (C), ou encore on prendrait la précaution de multiplier les termes de chaque série $S^{(P)}$ par un même nombre, lequel augmenterait indéfiniment avec P.

11. **Théorème** ($\mathfrak{B}$). *Il est impossible de trouver une suite infinie de fonctions $\varphi^{(1)}(n), \varphi^{(2)}(n), \ldots, \varphi^{(P)}(n)$ (la quantité $\varphi^{(P)}(n)$ étant, pour une valeur fixe de n, décroissante quand P augmente* [1]*), telles que la série Σu_n soit nécessairement divergente si le produit $u_n \varphi^{(P)}(n)$ augmente indéfiniment quel que soit P, et nécessairement convergente si, à partir d'une certaine valeur de P, ce produit reste fini.*

En effet si les fonctions $\varphi^{(P)}(n)$ possédaient la seconde propriété, les séries $\sum \frac{1}{\varphi^{(P)}(n)}$ seraient toutes convergentes, et dès lors le théorème précédent permettrait d'en déduire une nouvelle série convergente pour laquelle la première condition ne serait pas vérifiée.

12. Les questions résolues par les théorèmes (α) et (β) reviennent à très peu près à celle-ci: *Etant donnée une suite infinie de fonctions $f^{(P)}(n)$ augmentant indéfiniment, mais de plus en plus lentement, trouver une fonction $F(n)$ qui augmente indéfiniment plus lentement que chacune des premières.*

---

[1] Restriction justifiée par les mêmes considérations que la précédente relative au théorème ($\mathfrak{A}$).

Les fonctions données seraient $f^P(n) = S_n^{(P)}$ dans le théorème (α), $f^P(n) = \frac{1}{r_n^{(P)}}$ dans le théorème (β).

La solution est un peu plus simple que celles que nous avons présentées à propos de ces théorèmes; car les précautions que nous avons été obligés de prendre dans leur démonstration tiennent à ce que nous avions à trouver une fonction $F(n)$ satisfaisant pour n assez grand, non seulement à l'inégalité

$$F(n) < f^P(n),$$

mais à l'inégalité

$$F(n+1) - F(n) < f^P(n+1) - f^P(n)$$

dans le cas du théorème (α), et à l'inégalité

$$\frac{1}{F(n+1)} - \frac{1}{F(n)} > \frac{1}{f^P(n+1)} - \frac{1}{f^P(n)}$$

dans le cas du théorème (β).

Ici il suffira, ayant déterminé (comme il a été dit pour le théorème (α)) les entiers $n_1, n_2, \ldots, n_P, \ldots$ tels que $f^P(n_P)$ soit infini avec P, de poser $F(n) = f^P(n)$ pour $n_P \leqq n < n_{P+1}$, ou, plus généralement, de prendre pour valeurs de $F(n)$, entre $n = n_P$ et $n = n_{P+1}$, une suite croissante de $n_{P+1} - n_P$ termes allant de $f^P(n_P)$ à $f^{P+1}(n_{P+1})$.

13. Nous pourrons encore donner à notre procédé une forme un peu différente en imaginant que l'on ait défini la quantité $f^P(n)$ pour les valeurs non entières de P, ce qui se fera en prenant pour $f^P(n)$ une quantité continue par rapport à P, croissante avec n, mais constamment décroissante quand P croît sans que n varie, et coïncidant pour P entier avec les valeurs données, toutes conditions compatibles entre elles, si du moins chaque fonction f est constamment croissante. Notre règle pourra s'énoncer alors de la façon suivante:

Ayant pris arbitrairement une fonction indéfiniment croissante $\varphi(P)$ de la variable P, on déterminera pour chaque valeur de n une valeur de P par l'équation

$$(3) \qquad f^P(n) = \varphi(P),$$

ce qui est possible, du moins pour n suffisamment grand, car alors le premier membre de l'équation précédente, lequel est décroissant, sera, pour $P = 0$, supérieur au second, qui est indéfiniment croissant.

D'ailleurs les nombres P ainsi définis iront en augmentant constamment, car l'égalité $f^P(n) = \varphi(P)$ donne forcément

$$f^p(n+1) > \varphi(p), \quad \text{pour} \quad p \leqq P.$$

Ils vont en augmentant indéfiniment, car, P_0 étant un nombre donné quelconque, dès que n aura été pris tel que $f^{P_0}(n)$ soit supérieur à $\varphi(P_0)$, le nombre P devra dépasser P_0.

Si donc on désigne par $F(n)$ la valeur commune des deux membres de l'équation (3), la fonction $F(n)$ augmentera indéfiniment plus lentement que chacune des proposées.

14. Il est à remarquer qu'ici F, contrairement à ce qui pouvait arriver dans notre procédé primitif, à partir du moment où elle est atteinte par une des f^P, croît *plus* lentement qu'elle, en ce sens que si, pour une certaine valeur de n, on a $F(n) = f^P(n)$, on aura nécessairement, pour toute valeur suivante, $F(n) < f^P(n)$, l'égalité étant exclue.

15. Pour résoudre le même problème, on peut aussi commencer par la résolution du suivant:

Etant donnée une suite infinie de fonctions $\psi^P(m)$ augmentant indéfiniment de plus en plus vite, trouver un fonction $\Psi(m)$ qui augmente indéfiniment plus vite que chacune des premières.

Il suffira manifestement de prendre

$$\Psi(m) \geqq \psi^\lambda(m), \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, P) \tag{4}$$

P étant infini avec m.

On peut d'ailleurs s'arranger pour que Ψ soit constamment croissant, car les inégalités (4) ne sont pas incompatibles avec l'inégalité $\Psi(m) > \Psi(m-1)$.

L'application au problème précédemment posé est immédiate: on remplacera d'abord, s'il y a lieu, chaque fonction $f^P(n)$ par une fonction constamment croissante avec n, comme au n° 5, ce qui permettra de

considérer les fonctions inverses $\psi^P(m)$. On formera, comme nous venons de le dire, la fonction Ψ, et son inverse remplira manifestement le but proposé.

Il est d'ailleurs clair que cette méthode revient au fond à la précédente, la relation entre m et P étant telle que m soit la partie entière de la quantité $\varphi(P)$ qui figure au n° 13.

16. Si, lorsque P augmente indéfiniment sans que n varie, $f^P(n)$ ne tend pas vers 0, mais vers une limite L_n, laquelle augmente indéfiniment avec n, le procédé du n° 13 ne peut pas donner toutes les fonctions qui repondent à la question, puisqu'alors la fonction F, empruntant successivement les valeurs des f^P, croît au moins aussi vite que L_n.

Mais on peut toujours supposer qu'il n'en est pas ainsi en multipliant, s'il y a lieu, comme précédemment (n° 8), chacune des fonctions f^P par un nombre positif indépendant de n et nul pour P infini. Admettons donc qu'il existe un nombre A tel que, pour une valeur quelconque de n, $f^P(n)$ devienne inférieur à A si P est suffisamment grand. Les f^P étant toujours supposés constamment croissants, notre procédé permet de représenter toute fonction F augmentant indéfiniment plus lentement que les f^P, pourvu bien entendu, qu'elle croisse toujours *plus* lentement que les fonctions qu'elle atteint successivement, comme il a été dit au n° 14.

En effet, moyennant ces conditions, $F(n)$ sera, pour n assez grand, compris entre A et $f^0(n)$, et par conséquent l'égalité

$$F(n) = f^P(n) \tag{5}$$

définit une certaine valeur de P que nous désignerons par P_n.

Ces valeurs P_n vont en croissant constamment, puisque l'égalité (5) a, par hypothèse, pour conséquence nécessaire

$$F(n+1) < f^P(n+1) < f^p(n+1), \qquad (p < P);$$

ils vont en croissant indéfiniment puisque, P étant un nombre quelconque, on a pour n suffisamment grand

$$F(n) < f^P(n) < f^p(n), \qquad (p < P).$$

Il nous suffira dès lors de considérer une fonction constamment crois-

sante $\varphi(P)$ qui pour $P = P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, prenne respectivement les valeurs $f^{P_1}(1), f^{P_2}(2), \ldots, f^{P_n}(n), \ldots$. En employant cette fonction φ dans les opérations du n° 13, ces opérations donneront précisément comme résultat la fonction proposée F.

Si la fonction F ne remplit pas la condition de ne coïncider qu'une fois au plus avec chaque f^P, les P_n ne sont pas constamment croissants: on peut les remplacer par une suite de nombres constamment croissants et au plus égaux aux premiers, d'après ce qui a été dit au n° 8. On obtient ainsi une fonction $\varphi(P)$ et la fonction F' correspondante est, pour chaque valeur de n, au moins égale à F, l'égalité ayant lieu pour une infinité de ces valeurs.

17. La fonction F augmente d'autant plus lentement que la fonction $\varphi(P)$ augmente elle-même plus lentement. Car si les deux fonctions $\varphi(P), \varphi_1(P)$ satisfont, pour P très grand, à l'inégalité $\varphi_1(P) < \varphi(P)$, les équations

$$f^{\mathrm{p}}(n) = \varphi(\mathrm{p}),$$
$$f^{\mathrm{p}_1}(n) = \varphi_1(\mathrm{p}_1)$$

donneront nécessairement $\mathrm{p}_1 > \mathrm{p}$ et par suite $f^{\mathrm{p}_1}(n) < f^{\mathrm{p}}(n)$.

18. Parmi toutes les fonctions qui croissent plus lentement que chacune des f^P, en existe-t-il une qui croisse moins lentement que toutes les autres? Ce serait cette fonction qu'on pourrait être tenté de désigner pas la notation $f^{\omega}(n)$ en donnant au symbole ω le sens que lui attribue M. Cantor. Mais il est clair qu'une semblable fonction ne saurait être, car, en la désignant par F et supposant toujours, bien entendu, que le rapport $\frac{f^P(n)}{F(n)}$ soit infini avec n, quel que soit P, on pourrait considérer ces rapports successifs comme autant de fonctions $g^P(n)$ remplissant les mêmes conditions que les f^P.

On en déduirait une fonction $G(n)$ infinie avec n ainsi que tous les rapports $\frac{g^P(n)}{G(n)}$. La fonction $F(n).G(n)$, bien que croissant plus vite que F, satisferait donc néanmoins aux mêmes conditions, ce qui montre l'impossibilité de l'hypothèse faite sur F.

19. On peut même aller plus loin et démontrer la proposition suivante:

Etant données deux suites indéfinies de fonctions indéfiniment croissante, l'une

$$f^p(n) \qquad (p=1,2,\ldots,\infty)$$

composée de fonctions à croissance de plus en plus lente, l'autre

$$F^q(n) \qquad (q=1,2,\ldots,\infty)$$

composée de fonctions à croissance de plus en plus rapide, mais de manière que, pour des valeurs quelconques de p et de q, le rapport $\frac{f^p(n)}{F^q(n)}$ soit infini avec n, on peut toujours déterminer une fonction $\mathfrak{F}$ qui croisse plus lentement que n'importe quel f^p et moins lentement que n'importe quel F^q, chacun des rapports $\frac{f^p(n)}{\mathfrak{F}(n)}$, $\frac{\mathfrak{F}(n)}{F^q(n)}$ augmentant indéfiniment avec n.

Supposons en effet que, les fonctions f^p ayant été multipliées au besoin par des nombres de plus en plus petits, comme il a été dit plus haut, le rapport $\frac{f^{p'}(n)}{f^p(n)}$ ait 0 pour limite lorsque p' croît indéfiniment. Chacune des fonctions F^q correspondra (n° 16) à une fonction indéfiniment croissante $\varphi^q(p)$ et nous pourrons trouver une fonction $\Phi(p)$ qui croisse plus vite que chacune des φ^q. La fonction $\mathfrak{F}$ correspondante croîtra plus vite que chacune des F^q. D'après l'hypothèse que nous avons introduite, tous les rapports $\frac{f^p(n)}{\mathfrak{F}(n)}$ sont nécessairement infinis avec n. S'il en est de même des rapports $\frac{\mathfrak{F}(n)}{F^q(n)}$, la fonction $\mathfrak{F}$ répond à la question. Si non, on la remplacera par une autre satisfaisant aux mêmes conditions et dont le rapport avec la première croisse indéfiniment, ainsi que nous l'avons vu au n° précédent.

20. Il y aurait néanmoins lieu d'étudier les propriétés d'un ensemble *ordonné* de fonctions dont chacune croîtrait plus lentement que les précédentes, et parmi lesquelles s'en trouveraient de moins rapidement croissantes qu'une fonction quelconque donnée.

Les théorèmes précédents nous conduisent à cette conclusion qu'un pareil ensemble ne saurait être numérable.

On pourrait partir d'une suite infinie numérable de fonctions f^p, déduire de celles-là une nouvelle série de fonctions plus lentement croissantes encore, par exemple en prenant successivement pour fonctions $\varphi^{(p)}$ les fonctions f^p elles-mêmes, de ce tableau en déduire de même un troisième et ainsi de suite. L'ensemble ainsi formé ne posséderait pas encore la propriété demandée, car, en prenant dans chacun des tableaux précédents une fonction, on formerait une suite numérable équivalente à l'ensemble primitif, au point de vue qui nous occupe.[1] Mais on pourrait alors opérer sur cette suite comme sur la première, etc...., puis prendre dans chacun des tableaux infinis et en nombre infini ainsi formés, une fonction, ce qui donnerait une suite numérable qu'on utiliserait de nouveau: en un mot, chaque fois que l'on aurait obtenu un ensemble que l'on pourrait remplacer par une suite numérable, repartir de cette suite pour continuer les opérations. On formerait ainsi un ensemble qui ne pourrait plus être remplacé par aucune suite numérable de fonctions lui appartenant.

Un pareil ensemble remplirait il le but proposé? C'est ce qu'il paraît difficile de décider actuellement.

21. Le théorème (c) peut aussi se généraliser à l'aide des propositions précédentes. On a d'abord:

Théorème (γ). *Etant donnée une suite infinie de fonctions $\varphi^r(n)$ augmentant indéfiniment, mais de plus en plus lentement, on peut toujours déterminer les u_n de manière que la série Σu_n soit convergente et toutes les séries $\Sigma u_n \varphi^r(n)$ divergentes.*

Il suffira bien évidemment de former une fonction plus lentement croissante que chacune des φ^p et d'appliquer à celle-là le théorème (c). Ou encore, on pourrait appliquer le théorème (c) à chaque fonction φ^p et former une série plus lentement convergente que toutes celles qu'on aurait obtenues.

---

[1] C'est à ce type qu'appartiendrait le système indiqué par M. Pringsheim dans le Mémoire déjà cité (commencement de la page 356).

De même:

Théorème (δ). *Les fonctions* $\varphi^p(n)$ *étant encore supposées augmenter indéfiniment de plus en plus lentement, on peut toujours déterminer les* v_n *de manière que la série* Σv_n *soit divergente et toutes les séries* $\sum \frac{v_n}{\varphi^p(n)}$ *convergentes.*

Enfin ces deux propositions peuvent être considérées comme un cas particulier de celle-ci:

Etant données deux suites infinies de fonctions $\varphi^p(n)$, $\Phi^q(n)$, *les unes de plus en plus lentement, les autres de plus en plus rapidement croissantes, mais telles que pour tout système de valeurs de* p *et de* q, *le rapport* $\frac{\varphi^p(n)}{\Phi^q(n)}$ *augmente indéfiniment, on peut déterminer les* u_n *de manière que toutes les séries* $\Sigma u_n \varphi^p(n)$ *soient divergentes et toutes les séries* $\Sigma u_n \Phi^q(n)$ *convergentes.*

Car il est bien clair, d'après ce que nous avons démontré au n° 19, que l'on peut trouver deux fonctions F et G intermédiaires entre les φ et les Φ et dont le rapport $\frac{F}{G}$ soit infini avec n. Il suffira dès lors d'appliquer le théorème (c) à ce rapport. On obtiendra ainsi une suite U_n et l'on fera $u_n = \frac{U_n}{G(n)}$.

26 janvier 1894.

SUR LES INTÉGRALES RÉGULIÈRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

PAR

HELGE VON KOCH
À STOCKHOLM.

§ 1.

1. Dans la première partie du mémoire *Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires* (ce journal, t. 16) nous nous sommes occupé de la résolution d'un système infini d'équations linéaires

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{ik} x_k = 0 \qquad (i=-\infty \,..\, +\infty) \tag{1}$$

dont le déterminant $[A_{ik}]_{i,k=-\infty\,..\,+\infty}$ est de la forme normale (c'est-à-dire tel que le produit des éléments diagonaux converge absolument et que la somme des éléments non-diagonaux converge absolument).

Pour le but du présent mémoire, il est nécessaire de généraliser cette étude au cas où le nombre des équations du système (1) est, pour ainsi dire, plus grand que celui des inconnues: nous voulons parler de systèmes de la forme (1) où le déterminant des A_{ik} n'est plus de la forme normale mais le devient dès que l'on y supprime un certain nombre des lignes. Pour plus de généralité, nous ne supposerons pas que les seconds membres des équations proposées soient nuls; nous les supposerons seulement égaux à des constantes dont les valeurs absolues sont inférieures à une quantité donnée.

Avant d'aborder ce problème, rappelons une propriété des déterminants de la forme normale (mém. cité, n° 20) qui nous servira pour point de départ.

Soit

$$D = [A_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$$

un déterminant de la forme normale; désignons par

$$\begin{pmatrix} \iota_1 & .. & \iota_\nu \\ \varkappa_1 & .. & \varkappa_\nu \end{pmatrix}$$

celui des mineurs de D d'ordre ν qui s'obtient en remplaçant chacun des éléments $A_{\iota_1\varkappa_1}, \ldots, A_{\iota_\nu\varkappa_\nu}$ par l'unité et tout autre élément des lignes $\iota_1, \ldots, \iota_\nu$ (ou des colonnes $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\nu$) par zéro (nous conviendrons d'attribuer la valeur zéro à ce symbole toutes les fois que deux ι ou que deux $\varkappa$ seront égaux).

Posons $A_{ik} = a_{ik}$ $(i \gtrless k)$, $A_{ii} = 1 + a_{ii}$; par hypothèse la série $\Sigma_i \Sigma_k |a_{ik}|$ est convergente, ce qui entraîne la convergence du produit

$$\Pi_i (1 + \Sigma_k |a_{ik}|).$$

Désignons par $(i_1 .. i_r)$ ce que devient ce produit si l'on y supprime les facteurs correspondant à $i = i_1, \ldots, i_r$; on a alors

$$\left| \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ i_1 & .. & i_r \end{pmatrix} - 1 \right| \leqq (i_1 .. i_r) - 1 \tag{2}$$

et, en particulier (m désignant un entier positif quelconque),

$$\left| \begin{pmatrix} -m & .. & +m \\ -m & .. & +m \end{pmatrix} - 1 \right| \leqq (-m .. +m) - 1. \tag{2'}$$

De là on conclut l'existence d'un entier m' tel que les mineurs

$$\begin{pmatrix} -m & .. & +m \\ -m & .. & +m \end{pmatrix} \qquad (m = m', m' + 1, \ldots, \infty)$$

sont tous différents de zéro; pour trouver m', il suffit de se donner une quantité positive $\delta < 1$ et de déterminer m' en façon que

$$(-m .. +m) - 1 < \delta \quad \text{dès que} \quad m \geqq m'.$$

Or, désignant par $S_{-m..+m}$ ce que devient la série

$$\Sigma_i \Sigma_k |a_{ik}| \tag{3}$$

si l'on y supprime les termes correspondant aux indices $i = -m, .., +m$, on a (pour des m suffisamment grands):

$$(2'') \qquad (-m..+m) - 1 \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} (S_{-m..+m})^{\nu} = \frac{S_{-m..+m}}{1 - S_{-m..+m}}.$$

Il suffit donc de choisir m' de manière que

$$S_{-m'..+m'} < \frac{\delta}{1+\delta},$$

ce qui est possible puisqu'on suppose la série (3) convergente; si nous nous bornons, et c'est ce que nous ferons toujours dans ce qui va suivre, au cas où la série (3) est telle que le nombre m' s'obtient au moyen d'une suite (finie) d'opérations arithmétiques (c'est évidemment ce qui aura lieu dans les cas usuels), le résultat auquel nous sommes parvenu s'exprime ainsi:

Un déterminant de la forme normale étant donné, on peut, par une suite d'opérations arithmétiques, trouver un mineur d'ordre fini qui n'est pas nul.

2. Considérons maintenant un système linéaire

$$(4) \qquad \begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{ik} x_k &= A_i, & (i=-\infty..+\infty) \\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_{ik} x_k &= B_i & (i=1,2,..,q) \end{aligned}$$

où les équations peuvent être partagées en deux groupes, (A) et (B); dans le système (A), le déterminant des éléments est de la forme normale et les A_i sont, en valeur absolue, moindres qu'une quantité donnée; quant au système (B), qui n'embrasse qu'un nombre fini q d'équations, nous supposerons seulement que les coefficients B_{ik} soient, en valeur absolue, moindres qu'une quantité donnée.[1]

Proposons-nous de trouver toutes les valeurs des x_k qui satisfont

[1] Cf. mém. cité, n° 9.

aux équations (4) et qui restent inférieures en valeur absolue à un nombre fini (qui peut ne pas être connu d'avance) X:

$$(4') \qquad |x_k| < X. \qquad {\scriptstyle (k=-\infty..+\infty)}$$

Nous verrons que ce problème se ramène toujours à la résolution d'un certain système fini d'équations linéaires entre un nombre fini d'inconnus.

Pour abréger, désignons la série $\sum_k A_{ik} x_k$ par u_i et la série $\sum_k B_{ik} x_k$ par v_i de sorte que le système (4) prenne la forme

$$u_i = A_i, \qquad {\scriptstyle (i=-\infty..+\infty)}$$

$$v_i = B_i. \qquad {\scriptstyle (i=1,2,..,q)}$$

Soit D le déterminant des A_{ik}; choisissons un mineur quelconque de D:

$$\begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix}$$

et formons la série double

$$S = \sum_i \sum_\lambda \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r & i \\ k_1 & .. & k_r & k \end{pmatrix} A_{i\lambda} x_\lambda;$$

cette série étant absolument convergente (mém. cité, n° 20) quand les x_k satisfont aux conditions (4'), on aura

$$S = \sum_i \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r & i \\ k_1 & .. & k_r & k \end{pmatrix} A_i$$

$$= \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix} x_k - \sum_{\nu=1}^{r} \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_{\nu-1} & i_\nu & i_{\nu+1} & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_{\nu-1} & k & k_{\nu+1} & .. & k_r \end{pmatrix} x_{k_\nu};$$

d'où:

$$(5) \quad \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix} x_k = \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix}_k + \sum_{\nu=1}^{r} \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_{\nu-1} & i_\nu & i_{\nu+1} & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_{\nu-1} & k & k_{\nu+1} & .. & k_r \end{pmatrix} x_{k_\nu},$$

$\begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix}_k$ désignant ce que devient le déterminant $\begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix}$ si l'on y remplace les éléments A_{ik} de la colonne k par les A_i.

Or nous pouvons toujours, par la méthode précédente, trouver un mineur de D d'ordre fini qui n'est pas nul; si nous désignons par $\begin{pmatrix} i_1 \,.\,.\, i_r \\ k_1 \,.\,.\, k_r \end{pmatrix}$ ce mineur, toutes les inconnues x_k s'exprimeront, en vertu des équations (5), en fonction linéaire par rapport à r d'entre elles: $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$. Pour trouver les équations auxquelles doivent satisfaire $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$, il suffit de substituer aux x_k, dans les équations $u_i = A_i$ et $v_i = B_i$, les valeurs fournies par la formule (5); nous aurons

(6)
$$\sum_k \begin{pmatrix} i_1 \,.\,.\, i_r \\ k_1 \,.\,.\, k_r \end{pmatrix}_k A_{ik} + \sum_{\nu=1}^{r} x_{k_\nu} \sum_k \begin{pmatrix} i_1 \,.\,.\, i_{\nu-1} & i_\nu & i_{\nu+1} \,.\,.\, i_r \\ k_1 \,.\,.\, k_{\nu-1} & k & k_{\nu+1} \,.\,.\, k_r \end{pmatrix} A_{ik}$$
$$= \begin{pmatrix} i_1 \,.\,.\, i_r \\ k_1 \,.\,.\, k_r \end{pmatrix} A_i, \qquad (i=-\infty, \ldots +\infty)$$
$$\sum_k \begin{pmatrix} i_1 \,.\,.\, i_r \\ k_1 \,.\,.\, k_k \end{pmatrix}_k B_{ik} + \sum_{\nu=1}^{r} x_{k_\nu} \sum_k \begin{pmatrix} i_1 \,.\,.\, i_{\nu-1} & i_\nu & i_{\nu+1} \,.\,.\, i_r \\ k_1 \,.\,.\, k_{\nu-1} & k & k_{\nu+1} \,.\,.\, k_r \end{pmatrix} B_{ik}$$
$$= \begin{pmatrix} i_1 \,.\,.\, i_r \\ k_1 \,.\,.\, k_r \end{pmatrix} B_i. \qquad (i=1,2,\ldots,q)$$

En vertu des formules suivantes, que l'on obtient sans difficulté:

$$\sum_k \begin{pmatrix} i_1 \,.\,.\, i_r \\ k_1 \,.\,.\, k_r \end{pmatrix}_k A_{ik} = \begin{cases} \begin{pmatrix} i_1 \,.\,.\, i_r \\ k_1 \,.\,.\, k_r \end{pmatrix} A_i & (i \gtrless i_1, \ldots, i_r) \\ \begin{pmatrix} i_1 \,.\,.\, i_r \\ k_1 \,.\,.\, k_r \end{pmatrix} A_{i_\mu} - S_\mu & (i=i_\mu) \end{cases}$$

$$\sum_k \begin{pmatrix} i_1 \,.\,.\, i_{\nu-1} & i_\nu & i_{\nu+1} \,.\,.\, i_r \\ k_1 \,.\,.\, k_{\nu-1} & k & k_{\nu+1} \,.\,.\, k_r \end{pmatrix} A_{ik} = \begin{cases} 0 & (i \gtrless i_1, \ldots, i_r) \\ S_{\nu\nu} & (i=i_\nu) \\ S_{\mu\nu} & (i=i_\mu) \end{cases}$$

le système (6) se réduit à un système fini de $r+q$ équations:

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
S_{11}x_{k_1} + \dots + S_{r1}x_{k_r} &= S_1, \\
\cdot \quad \cdot\cdot \quad \cdot \quad &\cdot \\
S_{r1}x_{k_1} + \dots + S_{rr}x_{k_r} &= S_r, \\
T_{11}x_{k_1} + \dots + T_{r1}x_{k_r} &= T_1, \\
\cdot \quad \cdot\cdot \quad \cdot \quad &\cdot \\
T_{q1}x_{k_1} + \dots + T_{qr}x_{k_r} &= T_q,
\end{aligned}
$$

dans ces formules, $S_{\mu\nu}$ (pris avec le signe $(-1)^{\mu-\nu}$) représente ce que devient le symbole $\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ k_1 & \dots & k_r \end{pmatrix}$ quand on y supprime l'indice i_μ et l'indice k_ν, et S_μ représente ce que devient le déterminant $S_{\mu\mu}$ quand on y remplace la colonne R_μ par la colonne formée par les seconds membres des équations (4); $T_{\mu\nu}$ désigne ce que devient $S_{1\nu}$ quand on y remplace la ligne i_1 par la ligne des $B_{\mu k}$ et T_μ désigne ce que devient $T_{\mu 1}$ quand on y remplace la colonne k_1 par la colonne formée par les seconds membres des équations (4).

On peut donc, par une suite finie d'opérations arithmétiques, réduire un système infini tel que (4), *où les inconnues sont assujetties aux conditions* (4'), *à un système fini d'équations entre un nombre fini d'inconnues.*

3. Appliquons d'abord ce résultat au cas où les équations données sont homogènes ($A_i = B_j = 0$):

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
u_i &= 0, & (i = -\infty \dots +\infty) \\
v_i &= 0, & (i = 1, 2, \dots, q)
\end{aligned}
$$

les inconnues x_k étant toujours assujetties à la condition

$$
(8')\quad |x_k| < X. \qquad (k = -\infty \dots +\infty)
$$

Dans ce cas, le système transformé (7) sera aussi homogène, car les S_i et les T_i sont tous nuls. Convenons de donner le nom de *solution* du système (8) à tout système de valeurs des x_k qui vérifient les équations (8) et les conditions (8'), et de dire que ν solutions $x'_k, x''_k, \dots, x^{(\nu)}_k$ sont linéairement indépendantes s'il n'existe pas de constantes $c', c'', \dots, c^{(\nu)}$

telles que la somme $c'x'_k + c''x''_k + .. + c^{(\nu)}x^{(\nu)}_k$ soit nulle pour chaque valeur de l'indice k.

Il est clair d'abord que le système (8) ne peut avoir plus de r solutions linéairement indépendantes; car tous les x_k sont, en vertu des équations (5), parfaitement déterminés quand on connaît $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$.

Pour trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un nombre donné ν de solutions linéairement indépendantes, il suffit de considérer certains des déterminants de la matrice (A, B) des éléments A_{ik} et B_{ik}. Par la matrice des éléments A_{ik} et B_{ik} nous entendons l'ensemble de ces éléments, rangés en lignes et en colonnes (le premier indice se rapportant aux lignes, le second aux colonnes). Par $(A)_i$ nous désignons la ligne constituée par les éléments A_{ik} ($k = -\infty .. +\infty$) et par $(B)_i$ celle constituée par les éléments B_{ik} ($k = -\infty .. +\infty$); par la colonne k nous entendons celle où le second indice des éléments est k.

Désignons, en effet, par M_0 l'ensemble de déterminants que l'on peut former avec la matrice (A, B) en y supprimant q quelconques des lignes

$$(B)_1, (B)_2, \ldots, (B)_q, (A)_{i_1}, (A)_{i_2}, \ldots, (A)_{i_r}; \tag{9}$$

par M_1 l'ensemble de déterminants que l'on peut former avec (A, B) en y supprimant $q + 1$ quelconques des lignes (9) et 1 quelconque des colonnes

$$k_1, k_2, \ldots, k_r; \tag{10}$$

et, d'une manière générale, par M_ν l'ensemble de déterminants que l'on peut former avec (A, B) en y supprimant $q + \nu$ quelconques des lignes (9) et ν quelconques des colonnes (10). (Il est clair que le déterminant D défini plus haut appartient à l'ensemble M_0 et que l'ensemble M_r est composé d'un seul déterminant: $\begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix}$).

Je dis que les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système (8) ait ν solutions linéairement indépendantes, s'expriment en égalant à zéro tous les déterminants M d'indice $\nu - 1$.

Ces conditions sont nécessaires; car si l'un quelconque des M_μ ($\mu = \nu - 1$), par exemple $\begin{pmatrix} \iota_1 & .. & \iota_\mu \\ \chi_1 & .. & \chi_\mu \end{pmatrix}$, était différent de zéro, toutes les inconnues s'ex-

primeraient en fonction de $x_{\varkappa_1}, x_{\varkappa_2}, \ldots, x_{\varkappa_\mu}$ et le nombre des solutions linéairement indépendantes serait au plus égal à μ.

Ces conditions sont aussi suffisantes; car désignons par μ le plus petit entier tel qu'il y ait, parmi les déterminants M_μ, au moins un, par exemple $\begin{pmatrix} \iota_1 & \cdot\cdot & \iota_\mu \\ \varkappa_1 & \cdot\cdot & \varkappa_\mu \end{pmatrix}$, différent de zéro. D'après ce que nous avons vu, toutes les inconnues s'exprimeront en fonction de $x_{\varkappa_1}, x_{\varkappa_2}, \ldots, x_{\varkappa_\mu}$, et ces dernières quantités ont à vérifier $\mu + q$ équations linéaires et homogènes où les coefficients ne sont autres que des déterminants appartenant à l'ensemble $M_{\mu-1}$. Ces déterminants étant tous nuls, il est clair que le nombre des solutions linéairement indépendantes est égal à μ; et ce nombre μ ne peut pas être inférieur à ν pourvu que tous les $M_{\nu-1}$ soient nuls.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système donné (8) admette un nombre donné de solutions linéairement indépendantes, s'expriment donc par un nombre fini de relations entre les A et les B et l'on peut toujours trouver ces relations par un nombre fini d'opérations arithmétiques.

Supposons que, par un moyen quelconque, on ait trouvé, parmi les déterminants M_ν, au moins un, soit $\begin{pmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_\nu \\ k_1 & \cdot\cdot & k_\nu \end{pmatrix}$, différent de zéro, et que tous les déterminants $M_{\nu-1}$ soient nuls. D'après les formules précédentes, la solution générale du système (8) sera la suivante:

$$\begin{pmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_\nu \\ k_1 & \cdot\cdot & k_\nu \end{pmatrix} x_k = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdot\cdot & i_\nu \\ k & k_1 & \cdot\cdot & k_\nu \end{pmatrix} x_{k_1} + \cdot\cdot + \begin{pmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_{\nu-1} & i_\nu \\ k_1 & \cdot\cdot & k_{\nu-1} & k \end{pmatrix} x_{k_\nu}, \tag{11}$$

$$(k = -\infty \,..\, +\infty)$$

$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_\nu}$ désignant des constantes arbitraires.

4. L'étude du système non-homogène

$$\begin{aligned} u_i &= A_i, & (i = -\infty \,..\, +\infty) \\ v_i &= B_i, & (i = 1, 2, \ldots, q) \end{aligned} \tag{12}$$

se ramène aisément à celle du système homogène étudié au numéro précédent.

Déterminons d'abord un déterminant non nul $\begin{pmatrix} i_1 & . & . & i_r \\ k_1 & . & . & k_r \end{pmatrix}$ et formons les ensembles de déterminants désignés par $M_1, M_2, \ldots, M_r$.

Puis, formons des déterminants nouveaux en bordant la matrice de chacun des déterminants M_0 par l'une quelconque des lignes

$$(13) \qquad (B)_1, (B)_2, \ldots, (B)_q, (A)_{i_1}, (A)_{i_2}, \ldots, (A)_{i_r}$$

et par la colonne formée par les seconds membres des équations (12); désignons par M'_0 l'ensemble des déterminants ainsi obtenus. De la même manière, bordons la matrice de chacun des déterminants M_1 par l'une quelconque des dites lignes et par la dite colonne; et désignons par M'_1 l'ensemble ainsi obtenu; etc.

Nous obtiendrons les ensembles suivants de déterminants:

$$M'_0, M'_1, \ldots, M'_r.$$

Supposons que tous les déterminants des ensembles M_μ dont l'indice μ est inférieur à un certain indice ν soient nuls, mais que, parmi les M_ν, il y ait un au moins (soit $\begin{pmatrix} i_1 & . & . & i_\nu \\ k_1 & . & . & k_\nu \end{pmatrix}$) qui ne soit pas nul.

Je dis que les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système (12) ait au moins une solution, s'expriment en égalant à zéro tous les déterminants appartenant à l'ensemble M'_ν; et que, si ces conditions sont vérifiées, la solution générale du système (12) contient ν constantes arbitraires.

En effet, les conditions sont nécessaires puisqu'on peut, en admettant l'existence d'une solution du système proposé, par des formules telles que (7), exprimer chacun des déterminants M'_ν en fonction linéaire et homogène par rapport aux $M_{\nu-1}$, qui sont tous nuls, d'après l'hypothèse.

Ces conditions sont aussi suffisantes; car, d'après ce qui précède, toutes les inconnues x_k s'expriment en fonctions linéaires par rapport aux $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_\nu}$; et ces dernières n'ont à vérifier que $\nu + q$ équations linéaires où les coefficients des premiers membres sont les déterminants appartenant à l'ensemble $M_{\nu-1}$ et les seconds membres des déterminants appartenant à l'ensemble M'_ν.

Donc, si les conditions dont il s'agit sont vérifiées, on voit d'après la formule (5), que la solution générale du système (12) est la suivante

$$(14)\quad \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_\nu \\ k_1 & .. & k_\nu \end{pmatrix} x_k = \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_\nu \\ k_1 & .. & k_\nu \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & .. & i_\nu \\ k & k_2 & .. & k_\nu \end{pmatrix} x_{k_1} + .. + \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_{\nu-1} & i_\nu \\ k_1 & .. & k_{\nu-1} & k \end{pmatrix} x_{k_\nu}, \quad (k=-\infty..+\infty)$$

$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_\nu}$ désignant des constantes arbitraires.

§ 2.

5. Avant d'aborder le problème que nous avons en vue, rappelons succinctement les principaux résultats obtenu dans le mémoire cité plus haut.

Soit

$$(15)\qquad P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + P_3 \frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} + \ldots + P_n y = 0$$

une équation linéaire, privée du terme contenant $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, et ayant pour coefficients des fonctions analytiques de x, développables en séries de Laurent à l'intérieur d'un anneau circulaire entourant un point donné, par exemple $x = 0$:

$$(16)\qquad P_r(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{r\lambda} x^\lambda. \qquad (r=2,3,..,n)$$

Formons les fonctions

$$(17)\quad \varphi(\rho) = \rho(\rho-1)..(\rho-n+1) + \rho(\rho-1)..(\rho-n+3)a_{2,-2} + .. + a_{n,-n}$$
$$= (\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)\ldots(\rho-\rho_n),$$

$$(18)\quad A_{m\lambda} = (\rho+\lambda)(\rho+\lambda-1)\ldots(\rho+\lambda-n+3)a_{2,m-\lambda-2} + \ldots + a_{n,m-\lambda-n},$$

$$(19)\quad h_0(\rho) = 1, \qquad h_m(\rho) = \frac{1}{m^n} e^{-\frac{\rho-\rho_1}{m}} e^{-\frac{\rho-\rho_2}{m}} \ldots e^{-\frac{\rho-\rho_n}{m}} \equiv \frac{1}{m^n} e^{-\frac{n\rho}{m} + \frac{n(n-1)}{2m}}$$

et posons

$$(20)\qquad h_m(\rho) A_{m\lambda} = \chi_{m\lambda}(\rho), \qquad h_m(\rho)\varphi(\rho+m) = \chi_{mm}(\rho).$$

Si, dans l'expression différentielle $P(y)$, nous posons

$$y = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_\lambda x^{\rho+\lambda}, \tag{21}$$

$P(y)$ prend la forme

$$P(y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_m(\rho) x^{\rho+m-n} \tag{22}$$

où

$$G_m(\rho) = \varphi(\rho + m) g_m + \sum_\lambda' A_{m\lambda} g_\lambda, \qquad (\lambda \gtrless m) \tag{23}$$

et les équations linéaires auxquelles doivent satisfaire les g_λ pour que la fonction (21) représente une intégrale de l'équation (15), s'écrivent sous la forme

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \chi_{m\lambda} g_\lambda = 0. \qquad (m=-\infty..+\infty) \tag{24}$$

Le déterminant

$$D(\rho) = [\chi_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$$

des éléments χ_{ik} est de la forme normale[1] pour toute valeur finie de ρ et représente une fonction analytique et entière de ρ qui jouit des propriétés suivantes:

1° $D(\rho)$ vérifie l'égalité

$$D(\rho + 1) = (-1)^n D(\rho)$$

et représente, par suite, une fonction périodique de ρ (de période 1 ou 2).

2° $D(\rho)$ a n zéros incongruents (chacun d'eux étant compté avec son ordre de multiplicité) et peut être représenté sous la forme

$$D(\rho) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(\rho - \rho^{(\nu)})\pi}{\pi},$$

---

[1] Nous supposons que le point $x = 1$ se trouve à l'intérieur du domaine de convergence des séries (16). Mais, dans le cas contraire, on est ramené immédiatement à ce cas en remplaçant, dans $D(\rho)$, chaque élément χ_{ik} par $\chi_{ik} x_0^{i-k}$ où x_0 désigne un point du domaine de convergence.

$\rho', \rho'', \ldots, \rho^{(n)}$ désignant des constantes dont la somme est égale au nombre entier: $\frac{n(n-1)}{2}$.

3° Si on développe $D(\rho)$ en série suivant les puissances croissantes de ρ, les coefficients sont des séries absolument convergentes procédant selon les puissances et les produits des paramètres $\alpha_{r\lambda}$; les coefficients de ces séries sont des polynômes entiers en π dont les coefficients sont des nombres rationnels.

Soient $\rho', \rho'', \ldots, \rho^{(p)}$ un système de zéros incongruents de $D(\rho)$, $s', s'', \ldots s^{(p)}$ leurs ordres de multiplicité. On peut former n intégrales linéairement indépendantes qui se partagent entre p groupes appartenant respectivement aux zéros $\rho', \rho'', \ldots, \rho^{(p)}$ et contenant respectivement s', $s'', \ldots, s^{(p)}$ intégrales.

Pour représenter analytiquement les s intégrales appartenant à l'un quelconque ρ' de ces zéros, désignons par

$$s, s_1, s_2, \ldots, s_{r-1}$$

les nombres caractéristiques et par

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_r \end{pmatrix}$$

un système de mineurs caractéristiques correspondant à ρ' (pour la définition, voir mém. cité, n° 23); les nombres $s, s_1, \ldots$ vérifient les conditions suivantes:

$$s \geqq r; \; s > s_1 > \ldots > s_{r-1}; \; s - s_1 \geqq s_1 - s_2 \geqq \ldots \geqq s_{r-1}$$

et le mineur $\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_\nu \\ k_1 & \ldots & k_\nu \end{pmatrix}$ (où $\nu < r$) est, pour $\rho = \rho'$, nul d'ordre s_ν tandis que $\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix}$ est différent de zéro.

Posons

$$g_1(x\,,\rho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \binom{i_1}{\lambda} x^{\rho+\lambda},$$

$$g_2(x\,,\rho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & \lambda \end{pmatrix} x^{\rho+\lambda},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$g_r(x\,,\rho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdot\,\cdot & i_{r-1} & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdot\,\cdot & k_{r-1} & \lambda \end{pmatrix} x^{\rho+\lambda}.$$

Alors les intégrales en question se partagent entre r sous-groupes contenant respectivement

$$s - s_1 = \nu_1, \qquad s_1 - s_2 = \nu_2\,, \quad \ldots\,, \quad s_{r-1} = \nu_r$$

intégrales:

$$y_{1.1}\,, y_{1.2}\,, \ldots\,, y_{1.\nu_1}\,;\; y_{2.1}\,, y_{2.2}\,, \ldots\,, y_{2.\nu_2}\,;\; \ldots\,;\; y_{r.1}\,, y_{r.2}\,, \ldots\,, y_{r.\nu_r}$$

qui se représentent analytiquement par les formules suivantes

$$y_{1.1} = \frac{\partial^{s_1} g_1(x\,,\rho)}{\partial\rho^{s_1}}, \qquad y_{1.2} = \frac{\partial^{s_1+1} g_1(x\,,\rho)}{\partial\rho^{s_1+1}}, \quad \ldots\,, \quad y_{1.\nu_1} = \frac{\partial^{s-1} g_1(x\,,\rho)}{\partial\rho^{s-1}},$$

$$y_{2.1} = \frac{\partial^{s_2} g_2(x\,,\rho)}{\partial\rho^{s_2}}, \qquad y_{2.2} = \frac{\partial^{s_2+1} g_2(x\,,\rho)}{\partial\rho^{s_2+1}}, \quad \ldots\,, \quad y_{2.\nu_2} = \frac{\partial^{s_1-1} g_2(x\,,\rho)}{\partial\rho^{s_1-1}},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$y_{r.1} = g_r(x\,,\rho)\,, \qquad y_{r.2} = \frac{\partial g_r(x\,,\rho)}{\partial\rho}\,, \quad \ldots\,, \quad y_{r.\nu_r} = \frac{\partial^{s_{r-1}-1} g_r(x\,,\rho)}{\partial\rho^{s_{r-1}-1}}$$

où il faut substituer, après les différentiations, ρ' à la place de ρ.

6. Chacune des intégrales ainsi définies est de la forme

$$(25) \qquad x^{\rho}(F_0 + F_1 \log x + F_2 (\log x)^2 + \ldots + F_\mu (\log x)^\mu),$$

ρ désignant une racine de l'équation $D(\rho) = 0$ et les F étant des séries procédant selon les puissances positives et négatives de x, ayant pour coefficients des fonctions entières de ρ.

On dit, d'après M. THOMÉ, qu'une intégrale de la forme (25) est *régulière* (dans le voisinage de $x = 0$), si les F ne contiennent qu'un nombre fini de puissances négatives.

Considérant le cas où les coefficients P de l'équation proposée ne contiennent qu'un nombre fini de puissances négatives de x, M. THOMÉ a montré que, si m désigne le degré d'une certaine équation (l'équation déterminante), l'équation (15) ne peut avoir plus de m intégrales régulières et que l'on peut toujours former m séries de la forme (25) satisfaisant *formellement* à l'équation (15); ces séries représentent donc des intégrales régulières, pourvu qu'elles soient convergentes. Comme, dans le cas général, les séries ainsi obtenues sont divergentes, il faut, pour que l'équation proposée ait des intégrales régulières, que les paramètres satisfassent à certaines relations.

Il a été impossible de trouver ces relations, sauf dans un cas particulier, par les méthodes connues jusqu'ici. Comme nous allons le voir, on peut toujours les trouver à l'aide de la méthode indiquée au paragraphe précédent.

7. Si l'on cherche à vérifier l'équation (15) par une intégrale régulière de la forme

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} g_\lambda x^{\rho+\lambda} \tag{26}$$

le système d'équations (24) auquel doivent satisfaire les g_λ et ρ prend la forme

$$\sum_{\lambda=0}^{+\infty} \chi_{m\lambda} g_\lambda = 0. \qquad (m = -\infty \,..\, +\infty) \tag{27}$$

Ce système (27) se simplifie beaucoup dans le cas où le point singulier $x = 0$ n'est qu'un *pôle* pour les coefficients P de l'équation proposée. Dans ce cas, auquel nous nous bornerons dans ce qui va suivre, les développements (16) des P ne contiennent qu'un nombre limité de puissances négatives de x.

Soient

$$x^{-2-p_2},\ x^{-3-p_3},\ \ldots,\ x^{-n-p_n} \tag{28}$$

les puissances par lesquelles commencent respectivement les développements des fonctions

$$P_2(x)\ ,\ P_3(x)\ ,\ \ldots,\ P_n(x).$$

Considérons la suite des nombres entiers

$$(29) \qquad p_0\ ,\ p_2\ ,\ p_3\ ,\ \ldots,\ p_n$$

(où l'on a posé, pour plus de symétrie, $0 = p_0$); soit p le plus grand d'entre eux, et p_σ le premier nombre de la suite (29) (parcourue de gauche à droite) qui atteint cette valeur p.

Il vient

$$\chi_{ik} = 0 \quad \text{dès que} \quad k - i > p$$

et l'on voit que le degré de la fonction $\chi_{i.i+p}$ (divisée par $h_i(\rho)$) est égal à $n - \sigma$.

Les équations (27) se réduisent donc aux suivantes

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \chi_{m\lambda} g_\lambda = 0 \qquad (m = -p, -p+1, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$$

ou encore:

$$(30) \quad \begin{array}{l} \chi_{-p.0} g_0 = 0, \\ \chi_{-p+1.0} g_0 + \chi_{-p+1.1} g_1 = 0, \\ \quad . \qquad . \qquad . \\ \chi_{-1.0} g_0 + \chi_{-1.1} g_1 + \cdots + \chi_{-1.p-1} g_{p-1} = 0, \\ \chi_{0.0} g_0 + \chi_{0.1} g_1 + \cdots + \chi_{0.p-1} g_{p-1} + \chi_{0.p} g_p = 0, \\ \chi_{1.0} g_0 + \chi_{1.1} g_1 + \cdots + \chi_{1.p-1} g_{p-1} + \chi_{1.p} g_p + \chi_{1.p+1} g_{p+1} = 0, \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \end{array}$$

C'est à l'étude de ce système linéaire que se ramène le problème de trouver les intégrales régulières. Dans le cas où $p = 0$, le déterminant du système (30) est de la forme normale et se réduit d'ailleurs à son terme initial: $\prod_{\nu=0}^{\infty} \chi_{\nu\nu}$. C'est donc, au point de vue de la théorie des déterminants infinis, le cas le plus simple qu'on peut imaginer. Aussi ce n'est autre que le cas rendu célèbre par les travaux de plusieurs

géomètres et notamment par les recherches classiques de M. FUCHS. Nous pouvons donc le laisser de côté ici, d'autant plus que, dans le mémoire cité plus haut (voir n° 26), nous avons vu comment se présente la théorie de ce cas au point de vue de la théorie des déterminants infinis.

Supposant donc $p > 0$, nous voyons que le déterminant du système (30) n'est plus de la forme normale mais qu'il le devient dès qu'on supprime p quelconques des lignes; en effet, le déterminant du système qu'on obtient après avoir supprimé les p premières équations de (30), est de la forme normale puisque le produit des éléments diagonaux χ_{ii} converge absolument et que la somme des éléments non-diagonaux χ_{ik} converge absolument; et ce déterminant reste de la forme normale si l'on remplace l'une ou plusieurs des lignes par des lignes dont les indices appartiennent à la suite $-p, -p+1, \ldots, -1$.

Nous avons donc à envisager les déterminants obtenus en supprimant dans la matrice des éléments χ_{ik}:

(31) $$\chi_{i,0}, \chi_{i,1}, \ldots, \chi_{i,i+p}, \qquad (i=-p,-p+1,\ldots,0,1,\ldots,+\infty)$$

p quelconques des lignes. Pour plus de symétrie, nous pouvons considérer tous ces déterminants comme des mineurs d'un seul déterminant Δ, à savoir celui qu'on obtient en ajoutant à la matrice (31) p colonnes, numérotées $-p, -p+1, \ldots, -1$, dans chacune desquelles tous les éléments sont nuls; nous désignerons donc désormais par le symbole

(32) $$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdot\cdot & \alpha_q \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdot\cdot & \beta_q \end{pmatrix}$$

celui des mineurs d'ordre q de Δ qu'on obtient en remplaçant dans Δ chacun des éléments $\chi_{\alpha_1\beta_1}, \chi_{\alpha_2\beta_2}, \ldots, \chi_{\alpha_q\beta_q}$ par l'unité et tout autre élément des lignes $\alpha_1 \ldots \alpha_q$ ou des colonnes $\beta_1 \ldots \beta_q$ par zéro. Il est clair que chacun des déterminants (32) où $q < p$ est nul identiquement, car ils contiennent tous au moins une colonne composée de zéros; et que, si $q \geqq p$, le déterminant (32) est nul également si tous les nombres $-p$, $-p+1, \ldots, -1$, ne sont pas compris dans la suite $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$. En particulier, le symbole

(33) $$\begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2 & , \ldots, & \alpha_p \\ -p, & -p+1 & , \ldots, & -1 \end{pmatrix}$$

représente (au signe près) le déterminant de la matrice qu'on obtient en supprimant, dans la matrice (31), les lignes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$; et

$$(33') \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1 , & \alpha_2 & , \ldots , & \alpha_p & , \iota_1 , \iota_2 , \ldots , \iota_\nu \\ -p , & -p+1 & , \ldots , & -1 & , x_1 , x_2 , \ldots , x_\nu \end{pmatrix}$$

représente (au signe près), celui des mineurs d'ordre ν du déterminant (33) qu'on obtient en supprimant dans la matrice (31) les $p + \nu$ lignes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_\nu$ et les ν colonnes $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Comme toujours, nous convenons d'attribuer au symbole (32) la valeur nulle si deux quelconques des indices supérieurs ou si deux quelconques des indices inférieurs sont égaux entre eux.

D'après des résultats obtenus dans le mémoire cité, il est clair que, pour que l'équation (15) ait un nombre donné m d'intégrales régulières de la forme

$$(34) \qquad \sum_{\lambda=0}^{\infty} g_\lambda x^{R+\lambda}$$

où R désigne une constante donnée quelconque, il faut et il suffit que le système d'équations (30) ait, pour $\rho = R$, m solutions linéairement indépendantes. Or, d'après le paragraphe précédent, cette condition s'exprime de la manière suivante. On détermine (ce qu'on peut toujours faire par un nombre fini d'opérations arithmétiques), un entier ν et $p + 2\nu$ indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_\nu, x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ de telle manière que le déterminant (33') soit, pour $\rho = R$, différent de zéro; puis on égale à zéro tous ceux des mineurs de Δ d'ordre $p + m - 1$ qu'on peut définir en supprimant dans le symbole (33') $\nu - m + 1$ quelconques des indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_p$ et $\nu - m + 1$ quelconques des indices $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$.

Désignons par M_0 l'ensemble des mineurs qu'on peut définir en supprimant dans le symbole (33') ν quelconques des indices

$$(35) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_\nu$$

et les ν indices

$$(36) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_\nu;$$

par M_1 l'ensemble des mineurs qu'on peut définir en y supprimant $\nu - 1$ quelconques des indices (35) et $\nu - 1$ quelconques des indices (36); . . ; par $M_{\nu-1}$ l'ensemble des mineurs qu'on peut définir en supprimant dans (33) 1 quelconque des indices (35) et 1 quelconque des indices (36).

Chacun des déterminants ainsi définis est une fonction entière de ρ dont les coefficients sont fonctions des paramètres α.

Je dis que le nombre des intégrales régulières appartenant[1] *à R est égal à l'exposant de la plus haute puissance de $\rho - R$ qui divise toutes les fonctions M_0.*

8. Démontrons d'abord que, μ désignant l'exposant de la plus haute puissance de $\rho - R$ qui divise toutes les fonctions M_0, l'équation (15) a, au moins, μ intégrales régulières.

Puisque, pour $\rho = R$, les déterminants M_0 sont tous nuls tandis que le déterminant (33') (c'est-à-dire M_ν) ne s'évanouit pas, on peut déterminer un nombre r de la suite $0, 1, 2, \ldots, \nu$ tel que tous les déterminants M_k d'indice $k < r$ s'évanouissent pour $\rho = R$ tandis que, parmi les déterminants M_r, il y ait au moins un qui ne devient pas nul. Soit

$$(37) \qquad \begin{pmatrix} a_1 \,, & a_2 & , \ldots , & a_p \,, & i_1 \,, & i_2 \,, \ldots , & i_r \\ -p \,, & -p+1 & , \ldots , & -1 \,, & k_1 \,, & k_2 \,, \ldots , & k_r \end{pmatrix}$$

ce déterminant non nul. Désignons par M_0' l'ensemble de tous ceux des déterminants M_0 qu'on peut définir en supprimant dans le symbole (37) r quelconques des indices supérieurs et r quelconques des indices inférieurs; par M_1' l'ensemble de tous ceux des déterminants M_1 qu'on peut définir en supprimant dans (37) $r - 1$ quelconques des indices supérieurs et $r - 1$ quelconques des indices inférieurs; . . ; par M_k' l'ensemble de tous ceux des déterminants M_k qu'on peut définir en supprimant dans (37) $r - k$ quelconques des indices supérieurs et $r - k$ quelconques des indices inférieurs.

---

[1] Selon l'usage, nous dirons qu'une intégrale de la forme

$$x^\rho(F_0 + F_1 \log x + \ldots + F_\mu (\log x)^\mu)$$

est une intégrale *appartenant à l'exposant* ρ si les séries F (dont on suppose que l'une au moins n'est pas nulle identiquement) ne contiennent que des puissances *positives* de x.

Par hypothèse, tous les M_0 et, en particulier tous les M'_0 deviennent, pour $\rho = R$, nuls d'ordre μ au moins. Mais, parmi les M'_0, il y a un au moins qui ne devient nul que d'ordre μ *au plus;* en effet, le déterminant Δ, de même que tous ses mineurs d'ordre $1, 2, \ldots, p-1$ sont nuls identiquement; donc, en se servant d'un mode de démonstration indiqué dans le mémoire cité (n° 23), on voit que, si tous ceux des mineurs d'ordre p de Δ dont nous avons désigné l'ensemble par M'_0, s'annulaient d'un ordre supérieur à μ, il en serait de même de *tous* les mineurs d'ordre p de Δ, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Désignons donc par

$$(38) \qquad \mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r-1}$$

les exposants des plus hautes puissances de $\rho - R$ qui divisent respectivement tous les déterminants M'_0, tous les déterminants M'_1, tous les déterminants $M'_2, \ldots$ tous les déterminants M'_{r-1}. On peut démontrer (voir mém. cité, n° 23) que ces nombres satisfont nécessairement aux conditions suivantes

$$(39) \qquad \mu \geqq r\,;\ \mu > \mu_1 > \ldots > \mu_{r-1}\,;\ \mu - \mu_1 \geqq \mu_1 - \mu_2 \geqq \ldots \geqq \mu_{r-1}$$

et qu'on peut supposer les indices du symbole (37) rangés en façon que $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r-1}$ désignent les exposants des plus hautes puissances de $\rho - R$ qui divisent respectivement les déterminants suivants:

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_p \\ -p, & -p+1, & \ldots, & -1 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} i_1 \\ k_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{bmatrix}$$

où, d'une manière générale, $\begin{bmatrix} i_1 & \ldots & i_\nu \\ k_1 & \ldots & k_\nu \end{bmatrix}$ représente, pour abréger, le déterminant

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_p, & i_1, \ldots, i_\nu \\ -p, & -p+1, & \ldots, & -1, & k_1, \ldots, k_\nu \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire celui des mineurs d'ordre ν de $\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_p \\ -p, & -p+1, & \ldots, & -1 \end{pmatrix}$ qu'on obtient en remplaçant dans $\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_p \\ -p, & -p+1, & \ldots, & -1 \end{pmatrix}$ chacun

des éléments $\chi_{i_1 k_1}, \chi_{i_2 k_2}, \ldots, \chi_{i_r k_r}$ par l'unité et tout autre élément des lignes $i_1 \ldots i_r$ (ou des colonnes $k_1 \ldots k_r$) par zéro.

On voit aussi que tous les M_1 s'annulent d'ordre μ_1 au moins; car tous les mineurs de Δ d'ordre $1, 2, \ldots, p$ s'annulent d'ordre μ au moins et les mineurs M_1' s'annulent d'ordre μ_1 au moins; d'où s'ensuit que *tous* les mineurs d'ordre $p + 1$ de Δ s'annulent d'ordre μ_1 au moins. De la même manière on voit que tous les M_2 s'annulent d'ordre μ_2 au moins, .., que tous les M_{r-1} s'annulent d'ordre μ_{r-1} au moins.

Posons maintenant

$$(40) \qquad \begin{aligned} g_1(x, \rho) &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \begin{bmatrix} i_1 \\ \lambda \end{bmatrix} x^{\rho+\lambda}, \\ g_2(x, \rho) &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \begin{bmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & \lambda \end{bmatrix} x^{\rho+\lambda}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ g_r(x, \rho) &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \begin{bmatrix} i_1 & \ldots & i_{r-1} & i_r \\ k_1 & \ldots & k_{r-1} & \lambda \end{bmatrix} x^{\rho+\lambda} \end{aligned}$$

et portons l'une quelconque $g_\nu(x, \rho)$ de ces fonctions dans l'expression différentielle $P(y)$. En remarquant que chaque série de la forme

$$(41) \qquad \sum_\lambda \begin{bmatrix} i_1 & \ldots & i_{\nu-1} & i_\nu \\ k_1 & \ldots & k_{\nu-1} & \lambda \end{bmatrix} \chi_{i\lambda}$$

est nulle identiquement quand l'indice i est différent de chacun des indices

$$a_1, a_2, \ldots, a_p, i_1, i_2, \ldots, i_\nu$$

mais égale à un certain des déterminants $M_{\nu-1}'$ quand i est égal à un de ces indices, nous pourrons écrire

$$(42) \qquad \begin{aligned} P(g_\nu(x, \rho)) = \frac{G_{a_1}(\rho)}{h_{a_1}(\rho)} x^{\rho+a_1-n} + \ldots + \frac{G_{a_p}(\rho)}{h_{a_p}(\rho)} x^{\rho+a_p-n} \\ + \frac{G_{i_1}(\rho)}{h_{i_1}(\rho)} x^{\rho+i_1-n} + \ldots + \frac{G_{i_\nu}(\rho)}{h_{i_\nu}(\rho)} x^{\rho+i_\nu-n} \end{aligned}$$

$G_{a_1}(\rho), \ldots, G_{a_p}(\rho), G_{i_1}(\rho), \ldots, G_{i_\nu}(\rho)$ désignant certains des déterminants $M_{\nu-1}'$.

Tous les déterminants $\begin{bmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_{\nu-1} & i_\nu \\ k_1 & \cdot\cdot & k_{\nu-1} & \lambda \end{bmatrix}$ $(\lambda = 0, 1, .., +\infty)$ s'annulent pour $\rho = R$ d'ordre μ_ν au moins mais l'un d'eux, $\begin{bmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_\nu \\ k_1 & \cdot\cdot & k_\nu \end{bmatrix}$, ne s'annule que de cet ordre μ_ν. On en conclut que les $\mu_\nu - 1$ premières dérivées de la fonction $g_\nu(x, \rho)$ par rapport à ρ sont identiquement nulles quand on prend $\rho = R$ mais que les dérivées suivantes ne le sont pas. Le second membre de l'égalité (42) s'annulant, pour $\rho = R$, d'ordre $\mu_{\nu-1}$ au moins, il s'ensuit que les $\mu_\nu - \mu_{\nu-1}$ fonctions

$$(43)\quad y_{\nu.1} = \frac{\partial^{\mu_\nu} g_\nu(x, \rho)}{\partial\rho^{\mu_\nu}}, \qquad y_{\nu.2} = \frac{\partial^{\mu_\nu+1} g_\nu(x, \rho)}{\partial\rho^{\mu_\nu+1}}, \;\ldots,\; y_{\nu.\mu_{\nu-1}-\mu_\nu} = \frac{\partial^{\mu_{\nu-1}-1} g_\nu(x, \rho)}{\partial\rho^{\mu_{\nu-1}-1}}$$

représentent, pour $\rho = R$, $\mu_\nu - \mu_{\nu-1}$ intégrales de l'équation différentielle (15). La série $g_\nu(x, \rho)$ étant uniformément convergente par rapport à ρ à l'intérieur d'un domaine fini quelconque (cf. mém. cité, n° 22), on a le droit de la différentier terme par terme. Effectuant les calculs, on voit que les intégrales obtenues sont de la forme

$$y_{\nu.k} = x^R(F_{k.0} + F_{k.1}\log x + \ldots + F_{k.k-1}(\log x)^{k-1}) \quad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,\mu_{\nu-1}-\mu_\nu)}$$

les F désignant des séries procédant selon les puissances positives de x et convergentes à l'intérieur du même domaine que les développements (16). Dans chacune de ces intégrales, le coefficient de la plus haute puissance de $\log x$ est, à un coefficient numérique près, égal à la fonction $y_{\nu.1}$ qui, nous le savons, n'est pas nulle identiquement. Donc, les intégrales (43) sont linéairement indépendantes. Prenant successivement $\nu = 1, 2, .., r$, nous obtenons ainsi $\mu - \mu_1 + \mu_1 - \mu_2 + \ldots + \mu_{r-1} = \mu$ intégrales qui se partagent entre r sous-groupes comprenant respectivement $\mu - \mu_1 = \nu_1$, $\mu_1 - \mu_2 = \nu_2, \ldots, \mu_{r-1} = \nu_r$ intégrales:

$$(44)\qquad y_{1.1}, y_{1.2}, \ldots, y_{1.\nu_1};\; y_{2.1}, y_{2.2}, \ldots, y_{2.\nu_2};\; \ldots;\; y_{r.1}, y_{r.2}, \ldots, y_{r.\nu_r};$$

on démontre, en suivant la même marche que dans le mémoire cité (n° 24), que toutes ces intégrales sont linéairement indépendantes.

Donc, à la racine $\rho = R$ appartiennent μ intégrales régulières et linéairement indépendantes.

9. Démontrons maintenant que ces μ intégrales sont les *seules* intégrales régulières appartenant à $\rho = R$, c'est-à-dire, qu'une intégrale régulière quelconque appartenant à R s'exprime linéairement par rapport à elles.

Convenons de dire, pour abréger, qu'une intégrale régulière de la forme

$$(45) \qquad \Phi_{\mu} + \Phi_{\mu-1} \log x + \ldots + \Phi_0 (\log x)^{\mu}$$

est de *genre* μ si μ est l'exposant de la plus haute puissance de $\log x$ qui y figure (ce qui implique que le coefficient Φ_0 n'est pas nul identiquement).

Parmi les intégrales (44), il y a évidemment r qui sont de genre zéro. Désignons par $r + r_1$ le nombre de celles de genre inférieur ou égal à 1, par $r + r_1 + r_2$ le nombre de celles de genre inférieur ou égal à 2 et ainsi de suite. Il est clair que r est égal au nombre de ceux des nombres

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$$

qui sont supérieurs à zéro, que r_1 est le nombre de ceux supérieurs à 1, que r_2 est le nombre de ceux supérieurs à 2, et ainsi de suite. Donc, d'après les conditions (39), r_1 est le plus grand entier vérifiant la condition

$$(46) \qquad \mu_{r_1-1} > r - r_1 + 1,$$

r_2 le plus grand qui vérifie la condition

$$(47) \qquad \mu_{r_2-1} > r - r_2 + 2$$

et ainsi de suite.

Cela étant, nous allons démontrer que, parmi les intégrales régulières de l'équation (15) appartenant à l'exposant R, il y a r de genre zéro, $r + r_1$ de genre inférieur ou égal à 1, $r + r_1 + r_2$ de genre inférieur ou égal à 2, etc.; d'où se pourra conclure immédiatement le théorème énoncé plus haut.

Toute intégrale régulière de genre ν est de la forme

$$(48) \qquad \Phi_{\nu} + \Phi_{\nu-1} \log x + \ldots + \Phi_0 (\log x)^{\nu},$$

les Φ_k désignant des séries de la forme

$$\Phi_k = \sum_{\lambda=0}^{+\infty} g_{k.\lambda} x^{\rho+\lambda}. \tag{49} \qquad (k=0,1,\ldots,\nu)$$

Si l'on convient de regarder les $g_{k.\lambda}$ comme des constantes (indépendantes de ρ), on pourra écrire

$$\Phi_k (\log x)^{\nu-k} = \frac{\partial^{\nu-k} \Phi_k}{\partial \rho^{\nu-k}}. \tag{50}$$

Donc, désignant la fonction (48) par u et portant cette fonction dans l'expression différentielle $P(y)$, nous pouvons écrire

$$P(u) = P(\Phi_\nu) + P\left(\frac{\partial \Phi_{\nu-1}}{\partial \rho}\right) + \ldots + P\left(\frac{\partial^\nu \Phi_0}{\partial \rho^\nu}\right)$$

ou, ce qui est la même chose,

$$P(u) = P(\Phi_\nu) + \frac{\partial}{\partial \rho} P(\Phi_{\nu-1}) + \ldots + \frac{\partial^\nu}{\partial \rho^\nu} P(\Phi_0). \tag{51}$$

Nous avons d'ailleurs (cf. la formule (22)):

$$P(\Phi_k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{k.m} x^{\rho+m-n} \tag{52}$$

où

$$G_{k.m} = \varphi(\rho+m) g_{k.m} + \Sigma'_\lambda A_{m\lambda} g_{k.\lambda}. \tag{53}$$

Soit X un domaine quelconque situé à l'intérieur du domaine de convergence des séries (16) et P un domaine fini quelconque dans le plan représentatif de la variable ρ. Il est facile de voir que la série du second membre de (52) converge absolument et uniformément quand x et ρ appartiennent respectivement aux domaines X et P; en effet, considérons la série suivante

$$\Sigma_m | h_m G_{k.m} x^m |; \tag{54}$$

puisqu'on a

$$| h_m G_{k.m} | \leq \Sigma_\lambda |\chi_{m\lambda}| \, |g_{k.\lambda}|$$

cette série convergera tant que la série double

$$\Sigma_m \Sigma_\lambda |\chi_{m\lambda} g_{k.\lambda} x^m| \tag{55}$$

convergera. Or la série

$$\Sigma_m \Sigma_\lambda |\chi_{m\lambda} x^{m-\lambda}| \qquad (m \gtrless \lambda)$$

est uniformément convergente quand x et ρ restent à l'intérieur des domaines X et P (voir ma note dans les Acta mathem., t. 15) et, pour toutes les valeurs de x dans X, les quantités

$$|g_{k.\lambda} x^\lambda| \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, +\infty)$$

sont moindres qu'une quantité finie (puisque u est une intégrale de l'équation (15)). Donc la série (55) et, a fortiori, la série (54) convergent uniformément dans le domaine considéré; donc la série

$$\Sigma_m |m(m-1)\ldots(m-n+1)h_m G_{m.k} x^m|,$$

obtenue en différentiant n fois successives la série (54) par rapport à $|x|$, converge aussi uniformément. Pour des valeurs assez grandes (positives ou négatives) de m et pour toutes les valeurs ρ dans P, la quantité

$$|m(m-1)\ldots(m-n+1)h_m|$$

reste, en vertu de la définition même de h_m (formule (19)), plus grande qu'une certaine quantité positive qui n'est pas nulle. Donc, la série (52) converge aussi absolument et uniformément dans le domaine considéré.

Par conséquent, ayant le droit de différentier terme par terme, nous aurons, en désignant par $G'_{k.m}$, $G''_{k.m}$, ..., les dérivées de la fonction $G_{k.m}$ (prises par rapport à ρ en considérant toujours les $g_{k.m}$ comme des constantes)

$$\frac{\partial^a P(\Phi_k)}{\partial \rho^a} = \Sigma[G^{(a)}_{k.m} + (a)_1 G^{(a-1)}_{k.m} \log x + \ldots + G_{k.m}(\log x)^a] x^{\rho+m-n},$$

$(a)_1, (a)_2, \ldots$ désignant les coefficients binômes:

$$(a)_k = \frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{\underline{|k}}, \qquad (a)_0 = 1.$$

On en obtient:

$$P(u) = \Psi_\nu + \Psi_{\nu-1}\log x + \ldots + \Psi_0 (\log x)^\nu$$

où

$$\Psi_0 = \Sigma G_{0.m} x^{\rho+m-n},$$

$$\Psi_1 = \Sigma [(\nu)_1 G'_{0.m} + G_{1.m}] x^{\rho+m-n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(56)
$$\Psi_k = \Sigma [(\nu)_k G^{(k)}_{0.m} + (\nu - 1)_{k-1} G^{(k-1)}_{1.m} + \ldots + G_{k.m}] x^{\rho+m-n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Psi_\nu = \Sigma [G^{(\nu)}_{0.m} + G^{(\nu-1)}_{1.m} + \ldots + G_{\nu.m}] x^{\rho+m-n}.$$

Les quantités $g_{k.\lambda}$ doivent donc satisfaire à un système infini d'équation linéaires, à savoir à celui qu'on obtient en égalant à zéro tous les coefficients dans chacune des séries (56).

Ce système s'écrit ainsi

(57)
$$\sum_{\alpha=0}^{k} (\nu - \alpha)_{k-\alpha} G^{(k-\alpha)}_{\alpha.m} = 0; \qquad (k=0, 1, .., \nu; m=-\infty..+\infty)$$

nous allons le transformer en posant

$$G_{\alpha.m} = \xi_m H_{\alpha.m}, \qquad \xi_m = \frac{1}{h_m(\rho)}$$

d'où

$$G^{(k-\alpha)}_{\alpha.m} = \sum_{\beta=0}^{k-\alpha} (k - \alpha)_\beta H^{(k-\alpha-\beta)}_{\alpha.m} \xi^{(\beta)}$$

ce qui, en vertu de la relation

$$(\nu - \alpha)_{k-\alpha} (k - \alpha)_\beta = (\nu - k + \beta)_\beta (\nu - \alpha)_{k-\beta-\alpha},$$

donne au système (57) la forme

$$\sum_{\beta=0}^{k} (\nu - k + \beta)_\beta \xi^{(\beta)}_m \sum_{\alpha=0}^{k-\beta} (\nu - \alpha)_{k-\beta-\alpha} H^{(k-\beta-\alpha)}_{\alpha.m} = 0$$
$$(k=0, 1, .., \nu; m=-\infty..+\infty)$$

ou, ce qui revient au même

(58)
$$\sum_{\alpha=0}^{k} (\nu - \alpha)_{k-\alpha} H^{(k-\alpha)}_{\alpha.m} = 0. \qquad (k=0, 1, .., \nu; m=-\infty..+\infty)$$

Pour $\nu = 0$, ce système devient

(59) $$H_{0.m} = 0 \qquad (m = -\infty .. + \infty)$$

c'est-à-dire devient identique au système (30), étudié précédemment. Ce système ayant, d'après les hypothèses faites, pour $\rho = R$ r, et seulement r, solutions linéairement indépendantes, nous voyons bien que le nombre des intégrales régulières de genre zéro appartenant à R est égal à r.

Pour $\nu = 1$, le système (58) se réduit au suivant

$$H_{0.m} = 0, \qquad (m = -\infty .. + \infty)$$

$$H'_{0.m} + H_{1.m} = 0 \qquad (m = -\infty .. + \infty)$$

ou

(60) $$\sum_{\lambda=0}^{m+p} \chi_{m\lambda} g_{0.\lambda} = 0, \qquad (m = -p, -p+1, .., -1, 0, 1, .., +\infty)$$

(60') $$\sum_{\lambda=0}^{m+p} \chi_{m\lambda} g_{1.\lambda} = - \sum_{\lambda=0}^{m+p} \chi'_{m\lambda} g_{0.\lambda}. \qquad (m = -p, -p+1, .., -1, 0, 1, .., +\infty)$$

Par hypothèse, les déterminants $M'_0, M'_1, .., M'_{r-1}$ sont tous nuls pour $\rho = R$ tandis que le déterminant

(61) $$\begin{pmatrix} a_1 \ , & a_2 & , .., & a_p & , i_1, i_2, .., i_r \\ -p, & -p+1 & , .., & -1 & , k_1, k_2, .., k_r \end{pmatrix}$$

ne s'évanouit pas. Pour plus de symétrie, désignons les indices $a_1, a_2, .., a_p$ par $i_{r+1}, i_{r+2}, ..., i_{r+p}$ respectivement et les indices $-p, -p+1, .., -1$ par $k_{r+1}, k_{r+2}, .., k_{r+p}$ respectivement, de sorte que le symbole (61) prenne la forme

(61') $$\begin{pmatrix} i_1 & .. & i_{r+p} \\ k_1 & .. & k_{r+p} \end{pmatrix}.$$

Le système d'équations non-homogènes (60') auxquelles doivent satisfaire les $g_{1.\lambda}$, appartient évidemment à la classe considérée au paragraphe précédent. D'après les résultats y obtenus, pour que ce système ait une solution, il faut et il suffit que chacun des déterminants qu'on

obtient en bordant le déterminant (61′) par l'une quelconque des lignes $i_1 \dots i_{r+p}$ et par la colonne formée par les seconds membres:

$$-\sum_{\lambda=0}^{m+p} \chi'_{m\lambda} g_{0.\lambda} \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, r+p)$$

des équations (60′), soit égal à zéro. Donc, en désignant par $\Delta^{(\alpha,\beta)}$ ce que devient le symbole (61′) quand on y remplace l'indice i_α par l'indice β, nous aurons

$$(62) \qquad \sum\nolimits_{\beta,\lambda} \Delta^{(\alpha,\beta)} \chi'_{\beta.\lambda} g_{0.\lambda} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, r+p)$$

pour $\rho = R$. Or, les quantités $g_{0.\lambda}$ devant satisfaire au système (60), il faut que l'on ait

$$\Delta^{(\alpha,\beta)} g_{0.\lambda} = \Delta^{(\alpha,\beta)}_{1.\lambda} g_{0.k_1} + \Delta^{(\alpha,\beta)}_{2.\lambda} g_{0.k_2} + \dots + \Delta^{(\alpha,\beta)}_{r.\lambda} g_{0.k_r},$$

$\Delta^{(\alpha,\beta)}_{x.\lambda}$ désignant ce que devient le symbole $\Delta^{(\alpha,\beta)}$ quand on y remplace l'indice k_μ par l'indice λ. Les équations (62) prennent donc la forme suivante

$$(63) \qquad g_{0.k_1} \sum\nolimits_{\beta,\lambda} \Delta^{(\alpha,\beta)}_{1.\lambda} \chi'_{\beta.\lambda} + \dots + g_{0.k_r} \sum\nolimits_{\beta,\lambda} \Delta^{(\alpha,\beta)}_{r.\lambda} \chi'_{\beta.\lambda} = 0. \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, r+p)$$

Pour simplifier ces expressions, remarquons que la somme

$$\sum\nolimits_{\beta,\lambda} \Delta^{(\alpha,\beta)}_{x.\lambda} \chi'_{\beta.\lambda},$$

multipliée par $(-1)^{\alpha-x}$, représente la dérivée du déterminant qu'on peut définir en supprimant, dans le symbole (61′), l'indice i_α et l'indice k_x. Désignant par $S_{\alpha\beta}$ ce déterminant (multiplié par $(-1)^{\alpha-x}$) et par $S'_{\alpha\beta}$ la dérivée de $S_{\alpha\beta}$ par rapport à ρ, on peut, par conséquent, écrire les équations (63) ainsi:

$$(64) \qquad \begin{aligned} S'_{1.1} g_{0.k_1} + \dots + S'_{1.r} g_{0.k_r} &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ S'_{r.1} g_{0.k_1} + \dots + S'_{r.r} g_{0.k_r} &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ S'_{r+p.1} g_{0.k_1} + \dots + S'_{r+p.r} g_{0.k_r} &= 0. \end{aligned}$$

Considérons les déterminants qu'on peut former par les éléments de la matrice

$$(65)\qquad \begin{matrix} S'_{1.1} & \cdots & S'_{1.r}, \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ S'_{r+p.1} & \cdots & S'_{r+p.r}. \end{matrix}$$

Je dis que, parmi ces déterminants, tous ceux de degré supérieur à $r-r_1$ par rapport aux $S'_{\alpha.\beta}$, s'annulent pour $\rho=R_1$ et que, parmi les déterminants de degré $r-r_1$, il y a un au moins qui ne s'annule pas. En effet, on peut démontrer qu'un déterminant quelconque

$$(66)\qquad \begin{vmatrix} S_{m_1 n_1} & \cdots & S_{m_1 n_\alpha} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ S_{m_\alpha n_1} & \cdots & S_{m_\alpha n_\alpha} \end{vmatrix}$$

de degré α, formé par les lignes $m_1, \ldots, m_\alpha$ et par les colonnes $n_1, \ldots, n_\alpha$ de la matrice

$$(67)\qquad \begin{matrix} S_{1.1} & \cdots & S_{1.r}, \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ S_{r+p.1} & \cdots & S_{r+p.r} \end{matrix}$$

est (au signe près) égal à

$$\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_{r+p} \\ k_1 & \cdots & k_{r+p} \end{pmatrix}^{\alpha-1} . S_{m_1 \ldots m_\alpha ; n_1 \ldots n_\alpha},$$

$S_{m_1 \ldots m_\alpha ; n_1 \ldots n_\alpha}$ désignant celui des déterminants de l'ensemble $M'_{r-\alpha}$ qu'on peut définir en supprimant, dans le symbole (60'), les α indices $i_{m_1}, i_{m_2}, \ldots, i_{m_\alpha}$ et les α indices $k_{n_1}, k_{n_2}, \ldots, k_{n_\alpha}$. Pour $\rho = R$, toutes les fonctions $S_{\alpha\beta}$ s'annulent, puisque, par hypothèse, tous les M'_{r-1} s'annulent. Par conséquent, si le déterminant

$$(68)\qquad \begin{vmatrix} S'_{m_1 n_1} & \cdots & S'_{m_1 n_\alpha} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ S'_{m_\alpha . n_1} & \cdots & S'_{m_\alpha . n_\alpha} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro pour $\rho = R$, le déterminant (66) ne s'annulera que

d'ordre α pour $\rho = R$. Or, chacun des déterminants appartenant à $M'_{r-\alpha}$ s'annule d'ordre $\mu_{r-\alpha}$ au moins et, d'après la définition du nombre r_1, on a

$$\mu_{r-\alpha} > \alpha \quad \text{pour} \quad \alpha = r, r-1, \ldots, r - r_1 + 1. \tag{69}$$

Donc, tous les déterminants (68) dont le degré α est supérieur à $r - r_1$, s'annulent pour $\rho = R$. Si $r = r_1$, nous voyons donc que le système (64) a $r = r_1$ solutions linéairement indépendantes. Si $r_1 < r$ on a, en vertu de la définition de r_1,

$$\mu_{r_1} = r - r_1; \tag{70}$$

on en conclut que, parmi ceux des déterminants (68) dont le degré α est égal à $r - r_1$, il y a au moins un qui ne s'annule pas. Car, si tous ces déterminants s'annulaient pour $\rho = R$, tous les déterminants de l'ensemble M'_{r_1} s'annuleraient d'ordre $r - r_1 + 1$ au moins. Mais, parmi les déterminants M'_{r_1}, il y a un au moins qui ne s'annule que d'ordre μ_{r_1} au plus; donc on devait avoir

$$\mu_{r_1} \geqq r - r_1 + 1$$

ce qui est incompatible avec l'égalité (70).

Donc le nombre de solutions linéairement indépendantes du système (64) est égal à r_1 exactement.

Dans le système (60), les inconnues

$$g_{0.k_1}, g_{0.k_2}, \ldots, g_{0.k_r}$$

restent indéterminées puisque tous les déterminants M'_{r-1} s'annulent et que le déterminant $\begin{bmatrix} i_1 & . & . & i_r \\ k_1 & . & . & k_r \end{bmatrix}$ ne s'annule pas. Donc, en vertu du système (64), le nombre de ceux des $g_{0.\lambda}$ qui restent arbitraires est égal à r_1 exactement. Donc, dans l'intégrale la plus générale de genre *un* appartenant à $\rho = R$:

$$\Phi_1 + \Phi_0 \log x$$

le coefficient Φ_0 de $\log x$ contient r_1, et seulement r_1, constantes arbitraires. Donc le nombre des intégrales régulières de genre inférieur ou égal à *un* et appartenant à R est exactement égal à $r + r_1$.

Posant ensuite $\nu = 2$ dans le système (58) et procédant d'une manière analogue, on peut démontrer que $r + r_1 + r_2$ est le nombre des intégrales régulières de genre inférieur ou égal à *deux*, appartenant à R; et ainsi de suite.

10. Pour que, à une quantité donnée quelconque R, appartiennent μ intégrales régulières, il faut donc et il suffit que tous les déterminants M_0 s'annulent d'ordre μ pour $\rho = R$.

Cela étant, démontrons que l'exposant R d'une intégrale régulière quelconque dépend *algébriquement* des paramètres α.

A cet effet, déterminons un q suffisamment grand pour que le déterminant

$$(71)\qquad \begin{pmatrix} -p, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, q \\ -p, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, q \end{pmatrix}$$

soit différent de zéro pour $\rho = R$. On voit facilement que le déterminant

$$(72)\qquad \begin{pmatrix} q-p+1, & q-p+2, & \ldots, & q-1, & q \\ -p & , -p-1, & \ldots, & -2, & -1 \end{pmatrix}$$

est (au signe près) égal au produit suivant

$$(73)\qquad K.\prod_{i=-p}^{-p+q} \chi_{i.i+p},$$

K désignant, pour abréger, le déterminant (71).

Pour qu'il y ait μ intégrales régulières appartenant à R, il *faut* que le déterminant (72) s'annule d'ordre μ au moins; car, dans le cas contraire, tous les déterminants M_0 ne pourraient pas s'annuler d'ordre μ. Par conséquent, R doit être une racine d'ordre μ pour le produit (73). Or on a

$$(74)\qquad \chi_{-p.0} = h_{-p}(\rho) f(\rho), \qquad \chi_{-p+i.i} = h_{-p+i}(\rho) f(\rho + i),$$

$f(\rho)$ désignant la fonction suivante

$$(75)\qquad f(\rho) = \alpha_{\sigma,-p-\sigma}\rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+\sigma+1) + \ldots + \alpha_{n,-p-n}$$

et $h_{-p}(\rho)$ étant l'exponentielle définie par la formule (19) (on voit que l'équation $f(\rho) = 0$ est identique à l'équation déterminante de M. THOMÉ); donc R est racine de l'une au moins des fonctions $f(\rho + i)$.

Soit, dans la suite des fonctions

$$f(\rho), f(\rho + 1), f(\rho + 2), \ldots$$

$f(\rho + \lambda + 1)$ la première qui s'annule pour $\rho = R$ (ce qui revient à supposer que, parmi les racines de $f(\rho)$ congruentes à R, $R + \lambda + 1$ soit celle dont la partie réelle est la plus petite).

Nous avons vu que les μ intégrales appartenant à R peuvent (si elles existent) se représenter par des formules telles que (43), les g étant définies par les formules (40). Or, considérons un déterminant quelconque de la forme

$$\begin{bmatrix} i_1 & \ldots & i_{s-1} & i_s \\ k_1 & \ldots & k_{s-1} & k \end{bmatrix} \tag{76}$$

(s désignant un nombre de la suite $1, 2, \ldots, r$ et k un nombre de la suite $0, 1, \ldots + \infty$). En vertu de la définition des nombres μ_s, le déterminant

$$\begin{bmatrix} i_1 & \ldots & i_{s-1} \\ k_1 & \ldots & k_{s-1} \end{bmatrix} \tag{77}$$

est, pour $\rho = R$, nul d'ordre μ_{s-1} et doit conserver cette propriété même si l'on y remplace l'une ou plusieurs de ses lignes par des lignes quelconques appartenant à la matrice des éléments χ_{ik}. En particulier, remplaçons dans (77) la ligne i_s successivement par les lignes

$$-p, -p + 1, \ldots, -p + \lambda;$$

nous obtiendrons $\lambda + 1$ nouveaux déterminants qui pourront s'écrire sous la forme

$$\sum_{k=0}^{i+p} \begin{bmatrix} i_1 & \ldots & i_{s-1} & i_s \\ k_1 & \ldots & k_{s-1} & k \end{bmatrix} \chi_{ik}. \qquad {\scriptstyle (i = -p, -p+1, \ldots, -p+\lambda)}$$

Donc, les fonctions $\chi_{i\,i+p}$ $(i = -p, -p + 1, \ldots, -p + \lambda)$ étant par hypothèse différentes de zéro pour $\rho = R$, nous voyons que chacun des déterminants

$$\begin{bmatrix} i_1 & \ldots & i_{s-1} & i_s \\ k_1 & \ldots & k_{s-1} & k \end{bmatrix} \qquad {\scriptstyle (k = 0, 1, \ldots, \lambda)}$$

doit, pour $\rho = R$, s'annuler d'ordre μ_{s-1} au moins. Mais de là on peut conclure facilement, en vertu des formules (43) et (40), que toute intégrale régulière appartenant à R appartient nécessairement à l'exposant $R + \lambda + 1$.

En d'autres termes, l'exposant d'une intégrale régulière quelconque satisfait nécessairement à l'équation déterminante

$$f(\rho) = 0.$$

(Il y a évidemment une infinité d'exposants auxquels appartient une intégrale régulière quelconque; mais, dans l'énoncé précédent, le mot *exposant* se rapporte, bien entendu, à celui dont la partie réelle est la plus grande possible.)

11. Les déterminants M_0 sont définis dès que l'on connait les indices du symbole (33') et ces indices sont déterminés en façon que le déterminant (33') ne s'annule pas pour la valeur considérée R de ρ. Désignant les fonctions M_0, rangées dans un ordre quelconque, par

$$F_1(\rho)\,,\; F_2(\rho)\,,\; \ldots\,,\; F_\lambda(\rho),$$

nous savons que les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de μ intégrales régulières appartenant à R, s'expriment par les relations suivantes

$$F_k(R) = 0, \qquad F_k'(R) = 0\;, \quad \ldots\;, \quad F_k^{(\mu-1)}(R) = 0. \quad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,\lambda)}$$

Mais il importe d'observer qu'on peut opérer les calculs de telle manière que ces relations expriment les conditions dont il s'agit non seulement pour une valeur donnée de R, mais aussi pour des valeurs quelconques de R situées à l'intérieur d'un domaine fini C, fixé arbitrairement à l'avance.

En effet, la série $\sum_i \sum_k |\chi_{ik}|$ $(i \gtrless k)$ étant uniformément convergente par rapport à ρ à l'intérieur de tout domaine fini, il est clair, d'après les formules (2') et (2'') du paragraphe précédent, qu'on peut déterminer les nombres ν, α, ι et x de telle manière que le déterminant (33') reste différent de zéro pour des valeurs quelconques de ρ à l'intérieur d'un domaine fini, arbitrairement fixé à l'avance.

Or on trouve facilement un domaine fini C à l'intérieur duquel doit se trouver la quantité R. Car, d'après ce que nous avons vu, R doit satisfaire à l'équation déterminante $f(\rho) = 0$.

Pour notre but, il suffit donc de choisir le domaine C de telle manière que son contour limite embrasse toutes les $n - \sigma$ racines de l'équation $f(\rho) = 0$.

Ceci dit, nous avons le théorème suivant:

Si l'équation (15) *a des intégrales régulières, les exposants auxquels appartiennent ces intégrales sont racines de l'équation déterminante* $f(\rho) = 0$.

Pour que, à une racine quelconque R de l'équation déterminante, appartiennent un nombre donné μ d'intégrales régulières, il faut et il suffit que chacune des fonctions M_0:

$$F_1(\rho), F_2(\rho), \ldots, F_\lambda(\rho)$$

(*déterminées comme il a été expliqué plus haut*) *s'annule, pour $\rho = R$, de l'ordre μ.*

12. Comme on sait, la première partie de ce théorème avait été trouvée auparavant par M. Thomé, par une méthode entièrement différente. M. Thomé a démontré aussi que le nombre des intégrales régulières de l'équation (15) ne peut être plus grand que le degré de l'équation déterminante. Il est facile de voir que ce résultat découle comme corollaire des considérations précédentes.

En effet, soit R_1 une racine quelconque de l'équation déterminante et s le nombre de celles des racines (comptées avec leurs ordres de multiplicité) de cette équation qui sont congruentes à R_1 mais dont les parties réelles sont égales ou supérieurs à celle de R_1.

Choisissons q assez grand pour que le déterminant (71) soit, pour $\rho = R_1$, différent de zéro. Le déterminant (72) (divisé par un certain facteur qui ne s'annule pas pour $\rho = R_1$) est, comme nous avons vu, égal au produit

$$f(\rho)f(\rho + 1) \ldots f(\rho + q);$$

pour $\rho = R_1$ ce produit ne peut devenir nul d'un ordre supérieur à s; donc, parmi les déterminants M_0, il y a un au moins qui ne devient

pas nul d'un ordre supérieur à s. Donc, en vertu du théorème énoncé, le nombre des intégrales régulières appartenant à R_1 est au plus égal à s.

En particulier, dans un groupe quelconque de racines congruentes, désignons par R celle dont la partie réelle est la plus petite, et par s le nombre des racines appartenant au groupe. Une intégrale régulière appartenant à une racine quelconque congruente à R peut évidemment être considérée comme appartenant à R; donc, le nombre des intégrales régulières appartenant à R étant, au plus, égal à s, il est bien clair que le nombre total des intégrales régulières de l'équation (15) est, au plus, égal au degré $n-\sigma$ de l'équation déterminante, ce qu'il fallait démontrer.

Pour que toutes les n intégrales de l'équation (15) soient régulières, il faut donc que l'on ait

$$\sigma = 0,$$

ce qui démontre le théorème de M. FUCHS. Dans le mémoire cité (n° 26) nous avons vu comment la réciproque de ce théorème, due également à M. FUCHS, peut se démontrer à l'aide de la théorie des déterminants infinis.

13. Par le théorème que nous venons d'obtenir, le problème de reconnaître combien d'intégrales régulières possède une équation linéaire donnée, se ramène au problème de déterminer de quel ordre deviennent nulles les fonctions M_0 pour chacune des racines de l'équation déterminante $f(\rho) = 0$.

Les fonctions M_0 de ρ sont des fonctions de ρ et des paramètres $\alpha_{r\lambda}$ que l'on peut toujours trouver, après une suite d'opérations arithmétiques, dès qu'on se donne les valeurs numériques (réelles ou complexes) de ces paramètres. Désignons ces fonctions par

$$F_1(\rho, \alpha), F_2(\rho, \alpha), \ldots, F_\lambda(\rho, \alpha) \tag{78}$$

et convenons de les appeler *les fonctions déterminantes*. En vertu de la méthode employée, il est clair que, après avoir donné des valeurs fixes aux paramètres $\alpha_{r\lambda}$, on peut trouver une infinité de fonctions qui peuvent jouer le rôle de fonctions déterminantes.

En opérant d'une manière convenable, on peut déterminer les fonctions (78) de telle manière que ces fonctions jouent le rôle de fonctions

déterminantes, non seulement pour un système de valeurs fixes des paramètres α, mais pour tout système de valeurs de ces paramètres situées à l'intérieur d'un domaine α^0 que nous allons définir.

En effet, soit $\alpha^0_{r\lambda}$ un système quelconque de valeurs positives des paramètres $\alpha_{r\lambda}$ tel que les séries

$$\sum_{\lambda=-r-p_r}^{+\infty} \alpha^0_{r\lambda} x^\lambda \qquad (r=2,3,\ldots,n) \tag{79}$$

aient un domaine de convergence commun X.[1] Pour tout systeme de valeurs des $\alpha_{r\lambda}$ vérifiant les conditions

$$|\alpha_{r\lambda}| \leqq \alpha^0_{r\lambda} \qquad (\lambda=-r-p_r,\ldots,+\infty\,;\, r=2,3,\ldots,n) \tag{80}$$

les séries

$$\sum_{\lambda=-r-p_r}^{+\infty} \alpha_{r\lambda} x^\lambda$$

qui représentent les coefficients $P(x)$ de l'équation proposée, convergeront aussi dans le domaine X. Par définition, les nombres

$$-2-p_2\,,\ -3-p_3\,,\ldots,\ -n-p_n$$

sont les exposants des puissances de x par lesquelles commencent les développements (16), p désigne le plus grand des nombres

$$p_0(=0)\,,\ p_2\,,\ p_3\,,\ldots,\ p_n$$

et p_σ le premier de ces nombres qui atteint la valeur p. Donnons des valeurs fixes à ces nombres et désignons l'équation différentielle (15), correspondant à un système quelconque $\alpha_{r\lambda}$ de valeurs des paramètres, par

$$P(y\,;\,\alpha) = 0.$$

Dans l'équation déterminante de cette équation, le premier membre $f(\rho)$ est un polynôme de degré $n-\sigma$ où le coefficient de $\rho^{n-\sigma}$ est égal à $\alpha_{\sigma,-p\ \sigma}$ et les autres coefficients égaux à certains autres des paramètres

---

[1] Sans restreindre la généralité du problème, nous pouvons toujours supposer que le point $x = 1$ se trouve à l'intérieur de X (cf. la note à la page 347).

$\alpha_{r\lambda}$. Par conséquent, si l'on assujettit le paramètre $\alpha_{\sigma,-p-\sigma}$ à rester, en valeur absolue, supérieur à une quantité positive (non nulle) quelconque:

$$(80') \qquad |\alpha_{\sigma,-p-\sigma}| \geqq \theta$$

et les autres paramètres $\alpha_{r\lambda}$ à remplir les conditions (80), on pourra assigner une limite supérieure R^0 aux valeurs absolues des racines de l'équation déterminante. Pour abréger, désignons par T le domaine défini par les conditions (80) et (80').

Considérant ρ et les $\alpha_{r\lambda}$ comme des variables indépendantes, on voit sans difficulté que la série

$$(81) \qquad \sum_m \sum_\lambda |\chi_{m\lambda}| \qquad (m \gtreqless \lambda)$$

converge uniformément quand ρ se trouve dans le domaine

$$(82) \qquad |\rho| \leqq R^0$$

et les $\alpha_{r\lambda}$ dans le domaine T.

Donc, en vertu de la formule (2') du paragraphe précédent, on peut, par une suite d'opérations arithmétiques, déterminer un déterminant (33') qui reste différent de zéro tant que ρ et les $\alpha_{r\lambda}$ remplissent les conditions précédentes. Ce déterminant reste, par conséquent, différent de zéro pour chacune des racines de l'équation déterminante, pourvu que les α se trouvent dans le domaine T. Par conséquent les déterminants M_0, définis, comme il a été expliqué, par les indices du symbole (33'), jouent le rôle de fonctions déterminantes pour l'équation différentielle $P(y; \alpha) = 0$, α désignant un système quelconque de valeurs dans le domaine T. Le théorème est donc démontré.

Si l'on veut considérer les paramètres $\alpha_{r\lambda}$ comme absolument libres à se mouvoir dans toute l'étendue du plan, on peut encore trouver des fonctions qui jouent le rôle de fonctions déterminantes pour l'équation $P(y; \alpha) = 0$, pour tout système de valeurs des $\alpha_{r\lambda}$ qui donnent aux séries (16) un domaine de convergence commun. En effet, désignons par $\overline{M}_0$ l'ensemble des déterminants qu'on peut définir en supprimant successivement dans la matrice (31), p quelconques des lignes. On voit sans peine que, R désignant une racine quelconque de l'équation déterminante, pour que l'équation $P(y; \alpha) = 0$ ait μ intégrales appartenant à R, il faut et il

suffit que toutes les fonctions $\overline{M}_0$ s'annulent, pour $\rho = R$, d'ordre μ au moins. Mais, le nombre des déterminants $\overline{M}_0$ étant infiniment grand (excepté dans le cas régulier de M. FUCHS), on voit que le nombre des fonctions déterminantes augmente, dans ce cas, au delà de toute limite.

14. Supposons donc que les fonctions (78) jouent le rôle de fonctions déterminantes pour l'équation différentielle $P(y\,;\alpha) = 0$ tant que les paramètres α ont des valeurs à l'intérieur de T. Ces fonctions sont entières et transcendantes par rapport à ρ et ont pour coefficients des fonctions, généralement transcendantes, des α. Il ne semble donc pas que l'on peut, dans le cas le plus général, décider, par un nombre fini d'opérations arithmétiques, si l'équation différentielle $P(y\,;\alpha) = 0$ a des intégrales régulières ou non.

Mais nous allons montrer que l'on peut former une suite de relations *algébriques* entre les α, qui expriment des conditions suffisantes pour l'existence d'un nombre donné d'intégrales et qui s'approchent autant que l'on voudra des relations nécessaires et suffisantes précédemment obtenues.

En effet, les fonctions (78) ne sont autre chose que ceux des déterminants

(83) $$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ -p & \cdot\cdot & -1 \end{pmatrix}$$

dont les indices $\gamma_1 \ldots \gamma_p$ appartiennent à la suite des nombres

(84) $$\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \ldots\,,\ \alpha_p\,,\ \iota_1\,,\ \iota_2\,,\ \ldots\,,\ \iota_\nu.$$

Soit m' le plus grand des nombres (84) et désignons par m un entier quelconque plus grand que m'. Formons le déterminant suivant

(85) $$\begin{vmatrix} \chi_{-p.0} & \cdot\cdot & \chi_{-p.m+p} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \chi_{m.0} & \cdot\cdot & \chi_{m.m+p} \end{vmatrix}$$

(où les éléments au dessus de la diagonale sont tous nuls, d'après les hypothèses faites).

Soient $\delta_0\,,\ \delta_1\,,\ \ldots\,,\ \delta_m$ ceux des nombres

(86) $$-p\,,\ -p+1\,,\ \ldots\,,\ -1\,,\ 0\,,\ 1\,,\ \ldots\,,\ m$$

qui n'appartiennent pas à la suite $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$. D'après le théorème de LAPLACE, étendu aux déterminants infinis de la forme normale, le déterminant (83) s'écrira comme une fonction linéaire par rapport aux déterminants

$$(87) \qquad \begin{vmatrix} \chi_{\delta_0 \varepsilon_0} & \cdot\cdot & \chi_{\delta_0 \varepsilon_m} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \chi_{\delta_m \varepsilon_0} & \cdot\cdot & \chi_{\delta_m \varepsilon_m} \end{vmatrix}$$

où $\varepsilon_0 \ldots \varepsilon_m$ désigne successivement toute combinaison de m nombres différents de la suite

$$(88) \qquad 0, 1, \ldots m + p.$$

Par conséquent, si ces déterminants sont tous, pour une valeur donnée R de ρ, nuls d'un ordre μ, il en sera de même du déterminant (83).

Donc, pour que chacune des fonctions (83) s'annule d'ordre μ au moins pour $\rho = R$, il suffit que $\rho = R$ soit une racine d'ordre de multiplicité μ pour chacun de ceux des mineurs de (85) que l'on obtient en supprimant dans (85) p quelconques des lignes (84) et p quelconques des colonnes (88).

Le nombre des déterminants (87) ($\delta_0 \ldots \delta_m$ désignant successivement toute combinaison de $m + 1$ nombres différents de la suite (86) et $\varepsilon_0 \ldots \varepsilon_m$ toute combinaison de $m + 1$ nombres différents de la suite (88)) étant

$$\left(\frac{(m + p + 1)(m + p) \ldots (p + 1)}{m + 1}\right)^2,$$

il semble, au premier abord, que le nombre des relations qui expriment les conditions suffisantes cherchées, dépend de m et augmente avec m au delà de toute limite.

Mais il est facile de voir que, les paramètres α restant à l'intérieur du domaine T et m étant suffisamment grand, le nombre des relations *indépendantes* que l'on obtient, reste fini et indépendant de m. En effet, soient η et η' deux quantités positives assujetties à la seule condition

$$\eta + \eta' < 1;$$

d'après ce que nous savons, on peut déterminer un m_1 tel que l'inégalité

(89)
$$\left|\begin{pmatrix} -p & \ldots & -1 & 0 & \ldots & m_1 \\ -p & \ldots & -1 & 0 & \ldots & m_1 \end{pmatrix} - 1\right| < \eta$$

ait lieu pour toutes les valeurs de ρ à l'intérieur du domaine défini par (82) et pour toutes les valeurs des α à l'intérieur du domaine T. Or, désignant par m un entier quelconque supérieur à m_1 et convenant de représenter par

(90)
$$\begin{pmatrix} -p & \ldots & -1 & 0 & \ldots & m_1 \\ -p & \ldots & -1 & 0 & \ldots & m_1 \end{pmatrix}_m$$

le déterminant fini qu'on obtient en supprimant, dans le déterminant infini:

(91)
$$\begin{pmatrix} -p & \ldots & -1 & 0 & \ldots & m_1 \\ -p & \ldots & -1 & 0 & \ldots & m_1 \end{pmatrix}$$

toutes les lignes et toutes les colonnes numérotées

$$m+1\,, m+2\,, \ldots, +\infty,$$

nous savons que le déterminant (90), pour des valeurs croissantes de m, tend uniformément vers la limite (91) quand ρ et les α restent à l'intérieur du domaine considéré. Par conséquent, on peut prendre m_1 assez grand pour que l'on ait dans ce domaine

$$\left|\begin{pmatrix} -p & \ldots & m_1 \\ -p & \ldots & m_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -p & \ldots & m_1 \\ -p & \ldots & m_1 \end{pmatrix}_m\right| < \eta' \text{ dès que } m \geqq m_1$$

d'où, en vertu de (89),

$$\left|\begin{pmatrix} -p & \ldots & -1 & 0 & \ldots & m_1 \\ -p & \ldots & -1 & 0 & \ldots & m_1 \end{pmatrix}_m - 1\right| < \eta + \eta' \text{ dès que } m \geqq m_1.$$

Le déterminant (90) reste donc (pourvu que $m \geqq m_1$) différent de zéro pour toute valeur que peut prendre chacune des racines de l'équation déterminante $f(\rho) = 0$ quand les paramètres α se meuvent d'une manière quelconque à l'intérieur de leur domaine T.

Or, désignant d'une manière générale par

$$(92)\qquad \begin{vmatrix} \iota_1 & \cdot\cdot & \iota_\nu \\ x_1 & \cdot\cdot & x_\nu \end{vmatrix}_m$$

celui des mineurs d'ordre ν du déterminant (85) qu'on obtient en remplaçant dans (85) chacun des éléments $x_{\iota_1 x_1}, \ldots, x_{\iota_\nu x_\nu}$ par l'unité et tout autre élément des lignes $\iota_1 \ldots \iota_\nu$ (ou des colonnes $x_1 \ldots x_\nu$) par zéro, on voit que le déterminant (90) est (au signe près) identique au mineur

$$(93)\qquad \begin{vmatrix} -p & \ldots & -1 & 0 & \ldots & m_1 \\ m+1 & \ldots & m+p & 0 & \ldots & m_1 \end{vmatrix}_m .$$

Ce déterminant reste donc différent de zéro pour les valeurs de ρ qui nous intéresse; pour que les déterminants (87), qui ne sont autres que les mineurs d'ordre p du déterminant (85), s'annulent tous, pour une valeur donnée R dans le domaine (82), d'un ordre déterminé μ, il faut donc et il suffit que R soit une racine d'ordre μ pour chacun de ceux des mineurs d'ordre p du déterminant (85), que l'on peut définir en supprimant, dans le symbole (93), $m_1 + 1$ quelconques des indices supérieurs:

$$-p, \ldots, -1, 0, \ldots, m_1$$

et $m_1 + 1$ quelconques des indices inférieurs:

$$m+1, \ldots, m+p, 0, \ldots, m_1.$$

Le nombre de ces déterminants qui, avec les notations adoptées, se représentent par les symboles:

$$(94)\qquad \begin{vmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ \beta_1 & \cdot\cdot & \beta_p \end{vmatrix}_m \qquad \begin{pmatrix} \gamma_1 \ldots \gamma_p = -p, \ldots, -1, 0, \ldots, m_1 \\ \beta_1 \ldots \beta_p = m+1, \ldots, m+p, 0, \ldots, m_1 \end{pmatrix}$$

étant égal à

$$\left(\frac{(m_1+p+1)(m_1+p)\ldots(p+1)}{\underline{|m_1+1}}\right)^2,$$

ne dépend donc pas de m (pourvu que $m \geqq m_1$).

Si $m < m_1$, nous conviendrons d'attribuer au symbole (94) la valeur zéro toutes les fois que l'un ou plusieurs des indices $\gamma_1 \ldots \gamma_p$ seront supé-

rieurs à m ou que l'un ou plusieurs des indices $\beta_1 \,..\, \beta_p$ seront supérieurs à $m + p$.

Alors nous voyons que, m désignant un entier positif (ou nul) *quelconque,* pour que les fonctions déterminantes (83) s'annulent toutes d'ordre μ pour $\rho = R$, il suffit que les déterminants (94) s'annulent tous d'ordre μ pour $\rho = R$.

Ces conditions sont algébriques par rapport aux paramètres $\alpha_{r\lambda}$; en effet, désignons par $f(\rho) = f_0(\rho)$ la fonction $A_{-p.0}$, par $f_p(\rho)$ la fonction $\varphi(\rho)$ et par $f_{p+m}(\rho)$ la fonction $A_{m.0}$ nous aurons, en vertu des formules (20),

$$\chi_{ik} = f_{p+i-k}(\rho + k) h_i(\rho), \tag{95}$$

i désignant un indice quelconque de la suite $-p \,..\, +\infty$ et k un indice quelconque de la suite $0 \,..\, +\infty$. Au lieu du déterminant (85) nous considérerons donc le déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} f_0(\rho) & & & \\ f_1(\rho) & f_0(\rho + 1) & & \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ f_{p+m}(\rho) & f_{p+m-1}(\rho + 1) & \cdot\,\cdot & f_0(\rho + p + m) \end{vmatrix} \tag{96}$$

qui n'en diffère que par le facteur exponentiel

$$h_{-p}(\rho) h_{-p+1}(\rho) \,..\, h_m(\rho),$$

et nous désignerons, d'une manière générale, par les symboles

$$\left\| \begin{matrix} \iota_1 & \cdot\,\cdot & \iota_\nu \\ \varkappa_1 & \cdot\,\cdot & \varkappa_\nu \end{matrix} \right\|_m \tag{97}$$

les mineurs d'ordre ν de ce déterminant. Ces mineurs ne différant des mineurs correspondants (92) que par certains facteurs exponentiels, le résultat obtenu peut s'énoncer de cette manière:

Soit (15) une équation linéaire donnée; considérons un domaine T (tel qu'il a été défini plus haut) à l'intérieur duquel sont assujettis à rester les paramètres α de cette équation, et déterminons le nombre entier m_1 correspondant; soit enfin m un nombre entier (positif ou nul) quelconque.

Pour que l'équation (15) *admette μ intégrales régulières appartenant à une racine quelconque R de l'équation déterminante $f(\rho) = 0$, il suffit que toutes les fonctions*

$$(98) \qquad \left\| \begin{matrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ \beta_1 & \cdot\cdot & \beta_p \end{matrix} \right\|_m \qquad \left(\begin{matrix} \gamma_1 \,..\, \gamma_p = -p, \ldots, -1, 0, \ldots, m_1 \\ \beta_1 \,..\, \beta_p = m+1, \ldots m+p, 0, \ldots, m_1 \end{matrix} \right)$$

s'annulent, pour $\rho = R$, d'un ordre au moins égal à μ.

Comme on voit immédiatement, la fonction

$$(99) \qquad \left\| \begin{matrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ \beta_1 & \cdot\cdot & \beta_p \end{matrix} \right\|_m$$

est une fonction entière rationnelle de degré $(m + 1)n$ au plus par rapport à ρ dont les coefficients sont des fonctions entières rationnelles, à coefficients entiers, et de degré $m + 1$ au plus, par rapport aux paramètres suivants:

$$(100) \qquad \alpha_{2,i-2}\,,\ \alpha_{3,i-3}\,,\ \ldots,\ \alpha_{n,i-n}. \qquad (i = -p, \ldots, -1, 0, \ldots, m)$$

Donc, si l'on se donne un entier positif m, une racine quelconque R de l'équation déterminante et les valeurs numériques des $(n - 1)(m + p + 1)$ paramètres (100), on peut, par les méthodes ordinaires de l'algèbre, déterminer de quel ordre s'annule chacune des fonctions (98); et l'on peut par conséquent, après une suite d'opérations arithmétiques, décider si les conditions dont il s'agit, sont ou ne sont pas vérifiées.

Démontrons maintenant que, quand m croît indéfiniment, les fonctions (98), multipliées par des facteurs exponentiels convenables, tendent indéfiniment vers les fonctions déterminantes de l'équation (15); autrement dit, démontrons que les conditions suffisantes (correspondant à l'indice m), qui expriment l'existence d'un nombre donné d'intégrales régulières, s'approchent (pour des valeurs croissantes de m) autant que l'on veut des conditions nécessaires et suffisantes précédemment trouvées.

En effet, le déterminant (91) étant différent de zéro pour les valeurs de ρ et des paramètres qui nous intéressent, nous pouvons donner aux indices qui définissent le déterminant (33'), les valeurs suivantes:

$$\nu = m_1 + 1\,; \quad \alpha_1 = -p\,, \ \ldots, \ \alpha_p = -1\,, \ \iota_1 = 0\,, \ \iota_2 = 1\,, \ \ldots, \ \iota_\nu = m_1\,,$$

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 1\,, \ \ldots, \ x_\nu = m_1.$$

Les fonctions déterminantes sont donc les déterminants suivants:

$$(101) \qquad \begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ -p & \cdot\cdot & -1 \end{pmatrix} \qquad (\gamma_1 \ldots \gamma_p = -p, \ldots, -1, 0, \ldots, m_1)$$

et les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de μ intégrales régulières appartenant à R s'expriment en écrivant que les fonctions (101), ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $\mu - 1$, s'annulent pour $\rho = R$.

Désignant par

$$(102) \qquad \begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ -p & \cdot\cdot & -1 \end{pmatrix}_m$$

le déterminant fini auquel se réduit le déterminant infini $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ -p & \cdot\cdot & -1 \end{pmatrix}$ quand on y supprime toutes les lignes et toutes les colonnes numérotées

$$m + 1, m + 2, \ldots + \infty,$$

on obtient facilement la relation suivante:

$$(103) \qquad \begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ -p & \cdot\cdot & -1 \end{pmatrix}_m = (-1)^{(m+1)p} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ m+1 & \cdot\cdot & m+p \end{vmatrix}_m.$$

Le premier membre de cette égalité tendant uniformément, quand m croît indéfiniment, vers la valeur $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ -p & \cdot\cdot & -1 \end{pmatrix}$, il en sera de même du second membre. Il est donc démontré que les déterminants

$$(104) \qquad \left\| \begin{matrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ m+1 & \cdot\cdot & m+p \end{matrix} \right\|_m,$$

multipliés par des exponentielles convenables, tendent respectivement vers les fonctions déterminantes (101). Il reste à démontrer que chacun des autres déterminants (98), multiplié par un certain facteur exponentiel, tend vers zéro. En effet, chaque déterminant de la forme

$$\left\| \begin{matrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ \beta_1 & \cdot\cdot & \beta_p \end{matrix} \right\|_m$$

où ${}_i\beta_1 \ldots {}_i\beta_p$ n'est pas une permutation des nombres $m + 1, \ldots, m + p$ contient, suivant les cas, une ou plusieurs des colonnes $m + 1, \ldots, m + p$. Donc, si l'on désigne par u_i la somme suivante

(105) $$u_i = \chi_{ii} - 1 + \Sigma_k \chi_{ik}$$

et par v_m la somme des valeurs absolues des $\frac{p(p+1)}{2}$ éléments

$$\begin{matrix} \chi_{m-p+1.m+1}, & & \\ \chi_{m-p+2.m+1}, & \chi_{m-p+2.m+2}, & \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \chi_{m.m+1} & , \chi_{m.m+2} & \ldots, \chi_{m.m+p} \end{matrix}$$

on aura

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 & \ldots & \gamma_p \\ {}_i\beta_1 & \ldots & {}_i\beta_p \end{vmatrix}_m \leqq v_m \prod_{i=-p}^{m} (1 + u_i).$$

Le produit $\Pi(1 + u_i)$ étant uniformément convergent dans le domaine considéré et la quantité v_m tendant uniformément vers zéro quand m croît indéfiniment, notre assertion se trouve, par conséquent, justifiée.

15. Avant d'aller plus loin, nous allons appliquer ce qui précède à un exemple. Considérons l'équation suivante

(I) $$\frac{d^4y}{dx^4} + \left(\frac{a_0}{x^3} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{b_0}{x^4} + \frac{b_1}{x^3} + \frac{b_2}{x^2}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{c_0}{x^5} + \frac{c_1}{x^4} + \frac{c_2}{x^3}\right)y = 0$$

les a, b, c désignant des coefficients constants.

Ici nous avons $p = 1$, $\sigma = 2$ et

$$f_0(\rho) = \rho(\rho - 1)a_0 + \rho b_0 + c_0,$$

$$f_1(\rho) = \rho(\rho - 1)(\rho - 2)(\rho - 3) + \rho(\rho - 1)a_1 + \rho b_1 + c_1,$$

$$f_2(\rho) = \rho(\rho - 1)a_2 + \rho b_2 + c_2;$$

pour un indice $m > 2$, la fonction $f_m(\rho)$ est nulle identiquement. Supposons que les relations suivantes aient lieu entre les paramètres

(II) $$b_0 = -2a_0, \qquad b_1 = -c_1, \qquad c_0 = 2a_0.$$

Il s'ensuit que les fonctions $f_0(\rho)$, $f_0(\rho + 1)$ et $f_1(\rho)$ ont une racine com-

mune: $\rho = 1$. Pour $\rho = 1$, tous les mineurs d'ordre $p = 1$ du déterminant (96) s'annulent puisque, dans chacun d'eux, il y a une ligne au moins dont tous les éléments s'annulent. Par conséquent, l'équation proposée admet, au moins, une intégrale régulière appartenant à l'exposant $\rho = 1$. Soit

$$g_0 x + g_1 x^2 + g_2 x^3 + \cdots$$

cette intégrale. Pour trouver les valeurs des coefficients g, il faudra considérer le système d'équations (30). La fonction $f_0(\rho)$ ayant les deux racines $\rho = 1$ et $\rho = 2$, reste différente de zéro pour toute autre valeur de ρ. Les équations

$$f_2(1)g_0 + f_1(2)g_1 + f_0(3)g_2 = 0,$$
$$f_2(2)g_1 + f_1(3)g_2 + f_0(4)g_3 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

permettent donc d'exprimer $g_2, g_3, \ldots$ en fonction linéaire et homogène par rapport à g_0 et g_1.

Tous ceux des mineurs d'ordre 1 de la matrice

$$\begin{matrix} \chi_{-1.0}, & & \\ \chi_{0.0}, & \chi_{0.1}, & \\ \chi_{1.0}, & \chi_{1.1}, & \chi_{1.2}, \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \end{matrix}$$

qu'on obtient en supprimant l'une quelconque des colonnes et deux quelconques des lignes $1, 2, 3, \ldots$, s'annulent pour $\rho = 1$; il en est de même de ceux qu'on obtient en supprimant, dans la matrice précédente, l'une quelconque des colonnes, l'une quelconque des deux lignes $-1, 0$ et l'une quelconque des lignes $1, 2, 3, \ldots$; de plus, il existe un i tel que le mineur du second ordre $\begin{pmatrix} -1 & 0 & i \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne s'annule pas pour $\rho = 1$. Par conséquent, pour que *tous* les mineurs d'ordre 1 s'annulent pour $\rho = 1$, il faut et il suffit que les deux mineurs

$$\text{(III)} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

s'annulent pour $\rho = 1$.

Cette condition sera vérifiée si l'on suppose, par exemple, que les fonctions $f_1(\rho+1)$, $f_1(\rho+2)$, $f_2(\rho+1)$, $f_2(\rho+2)$ s'annulent aussi pour $\rho=1$; ceci exige que l'on ait, outre les relations (II), les conditions suivantes:

$$a_1 = b_1 = 0, \qquad b_2 = -4a_2, \qquad c_2 = 6a_2.$$

Si cette condition est vérifiée, nous savons, d'après les résultats précédents, que le système linéaire auquel doivent satisfaire les g, admettra *deux* solutions linéairement indépendantes. Ce sont les deux inconnues g_0 et g_1 qui resteront arbitraires. L'équation proposée admettra donc, dans ce cas, *deux* intégrales régulières et linéairement indépendantes.

Si nous supposons, au contraire, que l'un au moins des déterminants (III) soit différent de zéro pour $\rho=1$, il y aura une relation linéaire entre g_0 et g_1 à savoir:

$$g_1\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}_{\rho=1} = g_0\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}_{\rho=1}$$

et l'équation proposée n'admettra qu'une seule intégrale régulière.

Supposons, en particulier, que $\rho=1$ soit le seul nombre entier et positif qui vérifie l'équation

$$f_1(\rho) = 0.$$

Le terme initial

$$\text{(IV)} \qquad \chi_{11}\,\chi_{22}\,\chi_{33}\,\cdots$$

du développement du déterminant $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ sera alors différent de zéro pour $\rho=1$; les autres termes peuvent, comme nous savons, être ordonnés selon les puissances croissantes des paramètres et s'annulent tous quand on a

$$a_2 = 0, \qquad b_2 = 0, \qquad c_2 = 0.$$

Par conséquent, si a_2, b_2, c_2 ont des valeurs absolues inférieures à un certain nombre positif (qu'on peut calculer facilement en remarquant que

la différence entre le déterminant $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et le terme (IV) est, en valeur absolue, inférieure ou égale à la différence entre le produit

$$\Pi_i(\Sigma_k |\chi_{ik}|)$$

et la valeur absolue du même terme), le déterminant $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ reste, pour $\rho = 1$, différent de zéro. En d'autres termes, si a_2, b_2, c_2 sont suffisamment petits en valeur absolue, l'équation considérée n'admettra qu'une *seule* intégrale régulière.

La suite de critères algébriques que nous avons formée au n° 14 n'est pas la seule dont on pourrait se servir. Considérons, par exemple, le cas où les coefficients de l'équation considérée (15) sont des fonctions rationnelles de x ayant pour seules singularités les points $x = 0$ et $x = \infty$. Dans ce cas, les développements (16) ne contiennent qu'un nombre fini de termes; il existe donc, d'après la définition des fonctions $f_m(\rho)$ (cf. formule (95)) un entier positif q tel que la fonction $f_m(\rho)$ est nulle identiquement dès que l'indice $m > q$. Dans chaque colonne d'un déterminant quelconque de la forme (83), tous les éléments, sauf $q + 1$ d'entre eux, sont, par suite, nuls identiquement. Fixons arbitrairement un entier positif m et considérons la matrice partielle formée par m quelconques des colonnes de la matrice des éléments χ_{ik}. Puisque toutes ces colonnes appartiennent à chacun des déterminants (83), nous voyons que, si tous les déterminants de degré m qu'on peut former par m lignes de la matrice partielle considérée, s'annulent d'un ordre μ pour une valeur donnée R de ρ, il en sera de même de tous les déterminants (83) et l'équation (15) admettra, par suite, μ intégrales régulières appartenant à $\rho = R$. Or, d'après ce qui a été dit plus haut, le nombre des déterminants qu'on peut former au moyen de la matrice dont il s'agit sont, si on laisse de côté tous ceux qui sont nuls identiquement, en nombre nécessairement limité. Par là nous avons donc une méthode de former (et cela d'une infinité de manières) une suite indéfinie de critères algébriques pour décider si l'équation considérée admet des intégrales régulières. Prenant, par exemple, $m = 1$ on voit que, si les $q + 1$ fonctions

$$f_0(\rho)\ ,\ f_1(\rho)\ ,\ \ldots\ ,\ f_q(\rho)$$

s'annulent toutes d'ordre μ pour $\rho = R$, l'équation proposée admettra μ intégrales régulières. Supposons, en second lieu, $m = 2$ et considérons la matrice

$$\begin{matrix} f_0(\rho), & f_1(\rho) & , \ldots, & f_q(\rho), & \\ & f_0(\rho+1), & \ldots, & f_{q-1}(\rho+1), & f_q(\rho+1). \end{matrix}$$

D'après ce que nous avons vu, si chacun des déterminants

$$\begin{vmatrix} f_\alpha(\rho) & f_\beta(\rho) \\ f_{\alpha-1}(\rho+1) & f_{\beta-1}(\rho+1) \end{vmatrix} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, .., q)$$

(où l'on convient de remplacer la fonction $f_{\alpha-1}(\rho+1)$ par zéro quand $\alpha = 0$) s'annule d'ordre μ pour $\rho = R$, l'équation considérée admettra encore μ intégrales régulières.

Plus généralement, si tous les déterminants de degré m de la matrice formée par les m lignes suivantes

$$\begin{matrix} f_0(\rho), & f_1(\rho) & , \ldots, & f_q(\rho) & & \\ & f_0(\rho+1), & \ldots, & f_{q-1}(\rho+1), & f_q(\rho+1), & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & f_0(\rho+m-1), \ldots, & f_q(\rho+m-1) \end{matrix}$$

s'annulent d'ordre μ pour $\rho = R$, l'équation donnée admettra μ intégrales régulières appartenant à $\rho = R$. Nous pouvons ajouter que ces intégrales sont, en général, régulières non seulement dans le voisinage de $x = 0$ mais aussi dans le voisinage de $x = \infty$. Car on voit sans difficulté que les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de μ intégrales de la forme

$$x^R(F_0 + F_1 \log x + F_2 (\log x)^2 + \ldots)$$

où les F désignent des polynômes entiers de degré m au plus par rapport à x, s'expriment en disant que tous les déterminants dont il s'agit s'annulent d'ordre μ pour $\rho = R$.

Pour en avoir une application très simple, considérons l'équation du troisième ordre:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{a_0}{x^3} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{b_0}{x^4} + \frac{b_1}{x^3} + \frac{b_2}{x^2}\right)y = 0$$

avec la condition $a_0 \neq 0$.

Ici nous avons

$$f_0(\rho) = \rho a_0 + b_0, \qquad f_1(\rho) = \rho(\rho - 1)(\rho - 2) + \rho a_1 + b_1,$$
$$f_2(\rho) = \rho a_2 + b_2.$$

Donc, pour que les trois fonctions $f_0(\rho)$, $f_1(\rho)$, $f_2(\rho)$ possèdent une racine commune, il suffit que l'on ait

$$b_0 = -\eta a_0, \qquad b_2 = -\eta a_2,$$

η désignant l'une quelconque des racines de l'équation

$$f_1(\rho) = 0.$$

Par conséquent, l'équation

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{a_0}{x^3} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x}\right)\frac{dy}{dx} + \left(-\frac{\eta a_0}{x^4} + \frac{b_1}{x^3} - \frac{\eta a_2}{x^2}\right)y$$

a certainement une intégrale régulière[1] quelles que soient les valeurs des paramètres a_0, a_1, a_2 et b_1 (il convient d'ajouter que cette intégrale régulière est la seule qui existe puisque l'équation déterminante $f_0(\rho) = 0$ est du premier degré).

Appliquons maintenant à la même équation le second des critères dont nous venons de parler plus haut. Tous les déterminants du second degré de la matrice

$$\begin{matrix} f_0(\rho), & f_1(\rho), & f_2(\rho), \\ f_0(\rho+1), & f_1(\rho+1), & f_2(\rho+1) \end{matrix}$$

devant s'annuler pour $\rho = -\frac{b_0}{a_0}$, il est nécessaire de distinguer deux cas:

[1] A savoir la fonction x^η.

Ou bien la fonction $f_2(\rho + 1)$ ne s'annule pas pour cette valeur de ρ; alors on voit que $f_1(\rho)$ et $f_2(\rho)$ doivent être nuls, ce qui nous ramène au cas déjà traité. Ou bien la fonction s'annule pour $\rho = -\frac{b_0}{a_0}$; la seule équation qui reste à vérifier est alors

$$\begin{vmatrix} f_0(\rho + 1), & f_1(\rho + 1) \\ f_1(\rho) & , f_2(\rho) \end{vmatrix} = 0.$$

Or, quand $f_0(\rho) = 0$ et $f_2(\rho + 1) = 0$ on a $f_0(\rho + 1) = a_0$ et $f_2(\rho) = -a_2$ de sorte que l'équation précédente peut s'écrire

$$f_1(\rho)f_1(\rho + 1) + a_0 a_2 = 0.$$

Désignant par ϑ l'une quelconque des racines de cette équation, nous voyons donc que l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{a_0}{x^3} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x}\right)\frac{dy}{dx} + \left(-\frac{\vartheta a_0}{x^4} + \frac{b_1}{x^3} - \frac{(1 + \vartheta)a_2}{x^2}\right)y$$

a toujours une intégrale régulière, quelles que soient les valeurs des paramètres a_0, a_1, a_2 et b_1 (cette intégrale a d'ailleurs la forme simple $x^\vartheta - \frac{f_1(\vartheta)}{f_0(\vartheta + 1)} x^{\vartheta+1}$ ainsi qu'on le vérifie directement).

16. Nous venons de trouver (n° 14) une suite indéfinie de critères pour *l'existence* d'intégrales régulières. Proposons-nous maintenant de trouver une suite correspondante de critères pour la *non-existence* de ces intégrales.

Il est clair qu'on peut former une suite indéfinie de nombres positifs

$$\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_m, \ldots$$

ayant pour limite zéro et satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(106) \qquad \left|\begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ -p & \cdot\cdot & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ -p & \cdot\cdot & -1 \end{pmatrix}_m\right| \leq \eta_m; \quad {\scriptstyle (\gamma_1, \ldots, \gamma_p = -p, \ldots, -1, 0, \ldots, m_1)}$$

c'est ce qu'on voit immédiatement en partant de la formule

$$(107)\qquad \left|\begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdots & \gamma_p \\ -p & \cdots & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdots & \gamma_p \\ -p & \cdots & -1 \end{pmatrix}_m\right| \leqq \prod_{i=-p}^{+\infty}(1+u_i) - \prod_{i=-p}^{m}(1+u_i)$$

où les u_i sont définis par la formule (105). Pour trouver une expression de η_m en fonction de l'indice m, désignons par K une quantité positive plus grande que le produit

$$(108)\qquad \prod_{i=-p}^{+\infty}(1+u_i)$$

tant que ρ et les α restent dans leurs domaines respectifs R^0 et T; le second membre de (107) sera moindre que

$$(109)\qquad K\left(\prod_{i=m+1}^{+\infty}(1+u_i) - 1\right)$$

et, dès que m sera assez grand pour que la somme $\sum\limits_{i=m+1}^{+\infty} u_i = S_m$ soit inférieure à l'unité, la quantité (109) sera évidemment inférieure à

$$K\frac{S_m}{1-S_m}.$$

L'élément χ_{ii} (i étant un indice quelconque non nul) peut, en vertu de la formule

$$\chi_{ii} = \left(1+\frac{\rho-\rho_1}{i}\right)e^{-\frac{\rho-\rho_1}{i}}\left(1+\frac{\rho-\rho_2}{i}\right)e^{-\frac{\rho-\rho_2}{i}}\cdots\left(1+\frac{\rho-\rho_n}{i}\right)e^{-\frac{\rho-\rho_n}{i}}$$

s'écrire sous la forme

$$\chi_{ii} = 1 - \frac{A_i}{i^2},$$

A_i désignant une quantité qui, pour toutes les valeurs de l'indice i et pour toutes les valeurs de ρ et des α à l'intérieur des domaines R^0 et T, reste inférieure en valeur absolue à une quantité positive A. Un élément χ_{ik} dont les indices i et k sont différents, peut s'écrire sous la forme

$$\chi_{ik} = h_i(\rho)([i-k]_2 i^{n-2} + [i-k]_3 i^{n-3} + \cdots + [i-k]_n),$$

$[i-k]_2, [i-k]_3, \ldots [i-k]_n$ désignant certaines fonctions linéaires et homogènes par rapport aux $n-1$ paramètres suivants

$$(110) \qquad \alpha_{2.i-k-2},\ \alpha_{3.i-k-3},\ \ldots,\ \alpha_{n.i-k-n}$$

dont les coefficients sont des fonctions entières rationnelles, à coefficients entiers, de la quantité $\rho + k - i$. On voit immédiatement que chacune des séries

$$\Sigma_\nu |[\nu]_2|,\ \Sigma_\nu |[\nu]_3|,\ \ldots\ \Sigma_\nu |[\nu]_n|$$

est convergente et reste inférieure à une quantité finie tant que ρ reste dans le domaine R^0 et les α dans le domaine T. Par conséquent, on peut calculer des quantités positives $U_2, U_3, \ldots, U_n$ telles que la série

$$\sum_{i=m+1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{i+p} |\chi_{ik}| = S_m$$

reste inférieure à

$$U_2 \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} + U_3 \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{1}{i^3} + \ldots + U_n \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{1}{i^n}.$$

Cette dernière quantité est inférieure à

$$\frac{1}{m} U_2 + \frac{1}{2}\frac{1}{m^2} U_3 + \ldots + \frac{1}{n-1}\frac{1}{m^{n-1}} U_n$$

puisque l'on a

$$\sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{1}{i^q} < \int_m^{+\infty} \frac{dx}{x^q} = \frac{1}{q-1}\frac{1}{m^{q-1}}; \qquad (q=2,3,\ldots n)$$

nous pouvons donc écrire

$$S_m < \frac{1}{m} U_2 + \frac{1}{2}\frac{1}{m^2} U_3 + \ldots + \frac{1}{n-1}\frac{1}{m^{n-1}} U_n.$$

Fixons arbitrairement une quantité $\varepsilon < 1$ et déterminons un m' tel que S_m reste inférieur à ε dès que $m \geqq m'$; posons enfin

$$\frac{K}{1-\varepsilon}(U_2) = V_1; \qquad \frac{K}{2(1-\varepsilon)} U_3 = V_2; \quad \ldots; \quad \frac{K}{(n-1)(\varepsilon-1)} U_n = V_{n-1},$$

$$\theta(m) = \frac{V_1}{m} + \frac{V_2}{m^2} + \ldots + \frac{V_{n-1}}{m^{n-1}}.$$

Il est clair que nous pouvons poser, dans la formule (106)

$$(111) \qquad \eta_m = \theta(m) \quad \text{dès que } m \geqq m';$$

pour une valeur $m < m'$, nous conviendrons d'attribuer au symbole $\theta(m)$ une valeur quelconque η_m vérifiant la condition (106).

Pour que l'équation (15) possède une intégrale régulière appartenant à $\rho = R$, il faut et il suffit que tous les déterminants (101) s'annulent pour $\rho = R$. Donc, en vertu de (106) et (103) il faut avoir

$$(112) \qquad \left|\begin{Bmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ m+1 & \cdot\cdot & m+p \end{Bmatrix}_m\right| \leqq \theta(m) \quad \text{pour } \rho = R,$$

quelque grand que soit m. Si on a au contraire, pour une combinaison particulière $\gamma_1 \,.\,.\, \gamma_p$ de p nombres de la suite

$$(113) \qquad -p, \ldots, -1, 0, \ldots, m_1,$$

l'inégalité suivante:

$$(114) \qquad \left|\begin{Bmatrix} \gamma_1 & \cdot\cdot & \gamma_p \\ m+1 & \cdot\cdot & m+p \end{Bmatrix}_m\right| > \theta(m)$$

l'équation (15) ne peut avoir aucune intégrale régulière appartenant à $\rho = R$. Nous obtenons donc la règle suivante:

Soit (15) une équation linéaire donnée; considérons un domaine T, défini par (80) et (80'), à l'intérieur duquel sont assujettis à rester les paramètres α de cette équation et déterminons le nombre entier m_1 correspondant; soit enfin m un nombre entier (positif ou nul) quelconque.

Pour que l'équation (15) *n'admette aucune intégrale régulière appartenant à une racine donnée R de l'équation déterminante, il suffit que l'inégalité* (112) *soit vérifiée pour $\rho = R$ et pour une combinaison $\gamma_1 \,.\,.\, \gamma_p$ au moins de p nombres de la suite* (113).

Si l'on choisit m assez grand, ces conditions suffisantes pour la nonexistence d'intégrales régulières s'approchent autant que l'on veut des conditions nécessaires et suffisantes.

Supposons, en effet, que l'inégalité ou l'égalité (112), ait lieu quelque grand que soit m, pour une valeur donnée $\rho = R$ et pour toute combinaison $\gamma_1 \ldots \gamma_p$ de p nombres de la suite (113); quand m croîtra indéfiniment, le premier membre de (112) tendra vers $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \ldots & \gamma_p \\ -p & \ldots & -1 \end{pmatrix}$ et le second vers zéro. En d'autres termes, tous les déterminants (101) s'annulent pour $\rho = R$; par conséquent, l'équation (15) possède au moins une intégrale régulière appartenant à $\rho = R$.

Donc, pour qu'une telle intégrale n'existe pas, il faut et il suffit que l'on puisse trouver une combinaison $\gamma_1 \ldots \gamma_p$ et une valeur m assez grand pour que l'inégalité (114) ait lieu pour $\rho = R$ et pour cette valeur m; ce qui prouve bien notre assertion.

17. Pour décider si une équation de la forme (15) dont les paramètres ont des valeurs numériques données, possède ou non une intégrale régulière appartenant à R on peut, par conséquent, procéder de la manière suivante. On détermine le nombre m_1 et l'on calcule les valeurs, pour $\rho = R$, de toutes les fonctions (94) correspondant à l'indice m. En donnant à cet indice successivement les valeurs $0, 1, 2, \ldots$, on peut arriver à une valeur m telle que les fonctions (94) correspondantes sont toutes nulles pour $\rho = R$; dans ce cas, l'équation (15) a certainement une intégrale régulière appartenant à R. Ou bien, l'indice m peut être tel que l'inégalité (114) ait lieu pour une combinaison au moins de p nombre de la suite (113); dans ce cas, l'équation (15) ne possède aucune intégrale régulière appartenant à R.

Mais il pourrait arriver qu'aucun de ces deux cas ne se présente tant que l'indice m reste inférieur à tel nombre positif que l'on voudra fixer arbitrairement à l'avance; et le nombre des opérations arithmétiques nécessaires pour résoudre la question proposée pourrait alors croître au delà de toute limite. Toutefois, dans le cas le plus général, ce nombre ne croîtra pas au delà d'une certaine limite; car, si l'équation ne possède aucune intégrale régulière appartenant à R (et c'est là le cas le plus général), on arrivera, d'après ce qui précède, après une suite limitée d'opérations arithmétiques, à un indice m pour lequel l'inégalité (114) aura lieu.

Pourtant il y a des cas où la méthode précédente ne donnera pas de réponse à la question proposée; et il semble nécessaire alors, pour arriver à bonne fin, de faire une étude approfondie des fonctions déterminantes elles-mêmes. Une telle étude ne sera pas faite dans le présent mémoire. Nous nous bornerons, dans le paragraphe suivant, d'établir quelques propriétés générales de ces fonctions.

§ 3.

18. Nous avons vu que le problème général concernant les intégrales régulières se ramène à l'étude de certains déterminants infinis, définis par des symboles de la forme

$$(115)\qquad \begin{pmatrix} \iota_1 & \cdot\cdot & \iota_p & \iota_{p+1} & \cdot\cdot & \iota_{p+\nu} \\ -p & \cdot\cdot & -1 & x_{p+1} & \cdot\cdot & x_{p+\nu} \end{pmatrix},$$

les indices ι appartenant à la suite $-p, \ldots, -1, 0, \ldots, +\infty$ et les x à la suite $0, 1, \ldots, +\infty$. Nous savons que ces déterminants sont des fonctions entières de ρ dont les coefficients s'expriment en fonction des paramètres

$$(116)\qquad \alpha_{2,\lambda-2},\ \alpha_{3,\lambda-3},\ \ldots,\ \alpha_{n,\lambda-n}. \qquad (\lambda=-p,\ldots,-1,0,1,\ldots,+\infty)$$

Pour faire un premier pas dans l'étude de ces fonctions, nous allons les développer en séries procédant selon les puissances de ces paramètres.

Considérons d'abord le déterminant suivant

$$(117)\qquad \begin{pmatrix} -p & \cdot\cdot & -1 \\ -p & \cdot\cdot & -1 \end{pmatrix}$$

qui, comme on voit immédiatement, peut s'érire sous la forme

$$(118)\qquad \begin{vmatrix} \chi_{00} & \chi_{01} & \cdot\cdot & \chi_{0p} & & & \\ \chi_{10} & \chi_{11} & \cdot\cdot & \chi_{1p} & \chi_{1p+1} & & . \\ . & . & \cdot\cdot & . & . & . & \\ . & . & \cdot\cdot & . & . & . & . \end{vmatrix}.$$

Chacun des éléments diagonaux χ_{ii} étant linéaire par rapport aux $n - 1$ paramètres

(119) $$\alpha_{2,-2}\,,\ \alpha_{3,-3}\,,\ \ldots\,,\ \alpha_{n,-n}\,,$$

nous pouvons écrire

(120) $$\chi_{ii} = \chi_{ii}^{(1)} + \chi_{ii}^{(2)},$$

$\chi_{ii}^{(1)}$ étant indépendant des paramètres (116) et $\chi_{ii}^{(2)}$ étant linéaire et homogène par rapport à eux. On voit, d'après la formule (20), que ces fonctions s'écrivent ainsi

$$\chi_{ii}^{(1)} = (\rho + i)_n h_i(\rho),$$

$$\chi_{ii}^{(2)} = [(\rho + i)_{n-2}\alpha_{2,-2} + (\rho + i)_{n-3}\alpha_{3,-3} + \ldots + \alpha_{n,-n}]h_i(\rho),$$

le symbole $(\rho + i)_k$ désignant, d'une manière générale, le produit suivant

$$(\rho + i)(\rho + i - 1)\ldots(\rho + i - k + 1).$$

Le produit

(121) $$\pi(\rho) = \prod_{i=0}^{+\infty} \chi_{ii}^{(1)}$$

converge absolument; c'est ce qu'on voit en écrivant chaque facteur $\chi_{ii}^{(1)}$ (excepté $\chi_{00}^{(1)}$) sous la forme

(122) $$\chi_{ii}^{(1)} = \left(1 + \frac{\rho}{i}\right)e^{-\frac{\rho}{i}}\left(1 + \frac{\rho - 1}{i}\right)e^{-\frac{\rho-1}{i}}\ldots\left(1 + \frac{\rho - n + 1}{i}\right)e^{-\frac{\rho-n+1}{i}}.$$

Nous pouvons donc, dans le déterminant (118), diviser les éléments de chaque ligne i par le facteur correspondant $\chi_{ii}^{(1)}$ et, en introduisant les notations

(123) $$\frac{\chi_{ii}^{(2)}}{\chi_{ii}^{(1)}} = \xi_{ii}, \qquad \frac{\chi_{ik}}{\chi_{ii}^{(1)}} = \xi_{ik}, \qquad (i \gtrless k)$$

écrire le déterminant (117), divisé par $\pi(\rho)$, sous la forme suivante

(124) $$\begin{vmatrix} 1 + \xi_{00}\,, & \xi_{01} & ,\ \ldots \\ \xi_{10} & ,\ 1 + \xi_{11}\,, & \ldots \\ . & . & \ldots \end{vmatrix}.$$

La série $\sum_{i,k}|\xi_{ik}|$ étant convergente pour toute valeur de ρ, nous pouvons, en vertu d'une formule envisagée au mémoire cité (n° 7), développer le déterminant (124) sous la forme

$$(125)\qquad 1+\Sigma\xi_{\mu\mu}+\sum\begin{vmatrix}\xi_{\mu\mu} & \xi_{\mu\nu}\\ \xi_{\nu\mu} & \xi_{\nu\nu}\end{vmatrix}+\sum\begin{vmatrix}\xi_{\mu\mu} & \xi_{\mu\nu} & \xi_{\mu\lambda}\\ \xi_{\nu\mu} & \xi_{\nu\nu} & \xi_{\nu\lambda}\\ \xi_{\lambda\mu} & \xi_{\lambda\nu} & \xi_{\lambda\lambda}\end{vmatrix}+\ldots$$

les indices de sommation $\mu, \nu, \lambda, \ldots$ parcourant la suite des nombres

$$(126)\qquad 0, 1, \ldots, +\infty$$

et étant assujettis à la condition

$$(127)\qquad \mu<\nu<\lambda<\ldots$$

Or, nous pouvons écrire

$$\xi_{ik}=\frac{A_{ik}}{(\rho+i)_n}$$

où

$$(128)\qquad A_{ik}=(\rho+k)_{n-2}\alpha_{2,i-k-2}+(\rho+k)_{n-3}\alpha_{3,i-k-3}+\ldots+\alpha_{n,i-k-n}.$$

Donc, en introduisant les notations

$$S_{\mu_1\ldots\mu_r}=\begin{vmatrix}A_{\mu_1\mu_1} & \ldots & A_{\mu_1\mu_r}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ A_{\mu_r\mu_1} & \ldots & A_{\mu_r\mu_r}\end{vmatrix};\qquad S^{(r)}=\sum_{\mu_1\ldots\mu_r}\frac{S_{\mu_1\mu_r}}{(\rho+\mu_1)_n\ldots(\rho+\mu_r)_n}\qquad (\mu_1<\ldots<\mu_r)$$

nous obtenons la formule suivante

$$(129)\qquad \begin{pmatrix}-p & \ldots & -1\\ -p & \ldots & -1\end{pmatrix}=\pi(\rho)+\pi(\rho)S^{(1)}+\pi(\rho)S^{(2)}+\ldots+\pi(\rho)S^{(r)}+\ldots$$

La série du second membre converge absolument pour toute valeur de ρ et converge uniformément dans un domaine fini quelconque; et il en est de même de chacune des séries $S^{(r)}$ (voir mém. cité, § 1, n° 15). Chacune des fonctions A_{ik} étant linéaire et homogène par rapport aux paramètres (116), nous voyons que la fonction $\begin{pmatrix}-p & \ldots & -1\\ -p & \ldots & -1\end{pmatrix}$, développée

selon les puissances croissantes de ρ, aura pour coefficients des séries absolument convergentes procédant selon les puissances et les produits de ces paramètres; si on considère ce déterminant comme fonction des paramètres (116), la formule (129) donnera le développement de cette fonction selon les puissances croissantes de ces paramètres, $\pi(\rho)$ étant le terme de degré *zéro*, $\pi(\rho)S^{(1)}$ l'ensemble des termes de degré *un*, et, d'une manière générale, $\pi(\rho)S^{(r)}$ l'ensemble des termes de degré r.

D'après la formule (128), on pourra développer le déterminant $S_{\mu_1..\mu_r}$ de la manière suivante:

$$S_{\mu_1..\mu_r} = \Sigma(\rho+\mu_1)_{n-k_1}(\rho+\mu_2)_{n-k_2}\dots(\rho+\mu_r)_{n-k_r}S^{k_1..k_r}_{\mu_1..\mu_r} \tag{130}$$

la sommation s'étendant à toute permutation $k_1 \dots k_r$ de r nombres de la suite $2, 3, \dots, n$ et $S^{k_1..k_r}_{\mu_1..\mu_r}$ désignant le déterminant des r^2 éléments suivants

$$\alpha_{k_\lambda, \mu_\nu - \mu_\lambda - k_\lambda}. \qquad (\nu, \lambda = 1, 2, \dots, r) \tag{131}$$

Désignant l'élément $\alpha_{k_\lambda, \mu_\nu - \mu_\lambda - k_\lambda}$ par $(\nu . \lambda)$ de sorte que le déterminant $S^{k_1..k_r}_{\mu_1..\mu_r}$ prenne la forme

$$\begin{vmatrix} (1.1) & \dots & (1.r) \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ (r.1) & \dots & (r.r) \end{vmatrix}, \tag{132}$$

nous savons que chaque terme de ce déterminant peut s'obtenir en partageant, d'une manière convenable, les facteurs du terme initial

$$(1.1)(2.2)\dots(r.r)$$

en groupes et en permutant ensuite circulairement les indices appartenant à chaque groupe. Si donc nous désignons, d'une manière générale, par $[i_1 \dots i_\nu]$ le produit suivant

$$(i_1 . i_2)(i_2 . i_3)\dots(i_{\nu-1} . i_\nu)(i_\nu . i_1),$$

un terme quelconque du déterminant $S^{k_1..k_r}_{\mu_1..\mu_r}$ pourra s'écrire sous la forme

$$(-1)^{r-q} . [i_1 \dots i_{\nu_1}][i_{\nu_1+1} \dots i_{\nu_2}]\dots[i_{\nu_{q-1}+1} \dots i_{\nu_q}], \tag{133}$$

l'ensemble des indices i représentant une permutation convenable des

nombres $1, 2, \ldots, r$ et les nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q (= r)$ étant convenablement choisis dans la suite $1, 2, \ldots, r$.

Dans la série $S^{(r)}$, les indices de sommation $\mu_1 \ldots \mu_r$ prennent toutes les valeurs de la suite $0, 1, \ldots + \infty$ qui satisfont à la condition

$$\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_r;$$

or, le déterminant $S_{\mu_1 \ldots \mu_r}$ restant inaltéré si l'on permute ces indices d'une manière quelconque, nous pouvons écrire

$$(134) \qquad S^{(r)} = \frac{1}{\underline{|r}} \sum \frac{S_{\mu_1 \ldots \mu_r}}{(\rho + \mu_1)_n \ldots (\rho + \mu_r)_n},$$

les indices $\mu_1 \ldots \mu_r$ devant parcourir la suite $0, 1, \ldots + \infty$ et étant assujettis à la seule condition de rester tous inégaux.

Donc, remarquant qu'on a

$$\frac{(\rho + \mu)_{n-k}}{(\rho + \mu)_n} = \frac{1}{(\rho + \mu - n + k)_k}$$

et posant, pour abréger

$$(135) \qquad \frac{1}{(\rho + \mu_1 - n + k_1)_{k_1} (\rho + \mu_2 - n + k_2)_{k_2} \ldots (\rho + \mu_r - n + k_r)_{k_r}} = T^{k_1 \ldots k_r}_{\mu_1 \ldots \mu_r},$$

nous pouvons égaler la série $S^{(r)}$ (multipliée par $\underline{|r}$) à la somme d'un nombre fini de séries de la forme

$$(136) \qquad \sum_{\mu_1 \ldots \mu_r} (-1)^{r-q} [1 \ldots \nu_1][\nu_1 + 1 \ldots \nu_2] \ldots [\nu_{q-1} + 1 \ldots \nu_q] T^{k_1 \ldots k_r}_{\mu_1 \ldots \mu_r}$$

(car, dans l'expression $[1 \ldots \nu_1][\nu_1 + 1 \ldots \nu_2] \ldots [\nu_{q-1} + 1 \ldots \nu_q]$ on peut évidemment remplacer les indices $1, 2, \ldots, \nu_q$ par $i_1, i_2, \ldots, i_{\nu_q}$ puisque ceci ne change pas la valeur de la somme (136)).

Soient $\lambda_1 \ldots \lambda_{\nu_1}$ une permutation quelconque des nombres $\mu_1 \ldots \mu_{\nu_1}$; $\lambda_{\nu_1+1} \ldots \lambda_{\nu_2}$ une permutation quelconque des nombres $\mu_{\nu_1+1} \ldots \mu_{\nu_2}; \ldots; \lambda_{\nu_{q-1}+1} \ldots \lambda_{\nu_q}$ une permutation quelconque des nombres $\mu_{\nu_{q-1}+1} \ldots \mu_{\nu_q}$; il est facile de voir qu'on peut considérer la série (136) comme la somme de

$$\underline{|\nu_1}\, \underline{|\nu_2 - \nu_1} \ldots \underline{|\nu_q - \nu_{q-1}}$$

séries de la même forme (136) mais dans chacune desquelles on assujettit les indices $\mu_1 \dots \mu_r$ à des conditions de la forme

$$(136') \qquad \lambda_1 < \dots < \lambda_{\nu_1} ; \; \lambda_{\nu_1+1} < \dots < \lambda_{\nu_2} ; \; \dots ; \; \lambda_{\nu_{q-1}+1} < \dots < \lambda_{\nu_q} ;$$

ces conditions seront vérifiées, et cela de la manière la plus générale, si nous posons

$$(137) \qquad \begin{gathered} \lambda_1 = \beta_1, \qquad \lambda_{\nu_1+1} = \beta_2 \, , \quad \dots , \quad \lambda_{\nu_{q-1}+1} = \beta_q , \\ \lambda_{\nu_i+\tau} = \beta_{i+1} + c_{i.1} + c_{i.2} + \dots + c_{i.\tau-1} \\ {\scriptstyle (\tau=2,3,\dots,\nu_{i+1}-\nu_i\,;\; i=0,1,\dots,q-1)} \end{gathered}$$

où $\nu_0 = 0$, les c désignant des entiers positifs (non nuls) quelconques et les β étant des entiers positifs (ou nuls) assujettis aux conditions suivantes

$$(138) \qquad \begin{gathered} \beta_{i+1} \gtrless \beta_{j+1}, \\ \beta_{i+1} + c_{i.1} + \dots + c_{i.\tau-1} \gtrless \beta_{j+1} + c_{j.1} + \dots + c_{j.\sigma-1} , \\ (i \gtrless j \, ; \; \tau = 2 \, , 3 \, , \dots , \nu_{i+1} - \nu_i \, ; \; \sigma = 2 \, , 3 \, , \dots , \nu_{j+1} - \nu_j). \end{gathered}$$

Par conséquent, une série quelconque de la forme (136) où les indices $\mu_1 \dots \mu_r$ sont assujettis aux conditions (136') peut être remplacée par une série de cette nouvelle forme

$$(139) \qquad \sum_{(c)} \sum_{\beta_1 \dots \beta_q} (-1)^{r-q} [1 \dots \nu_1][\nu_1 + 1 \dots \nu_2] \dots [\nu_{q-1} + 1 \dots \nu_q] \, T^{k_1 \dots k_r}_{\mu_1 \dots \mu_r}$$

où le premier signe de sommation indique que les nombres c doivent parcourir, indépendamment les uns des autres, la suite $1 \, , 2 \, , \dots , + \infty$, la sommation par rapport à $\beta_1 \dots \beta_q$ étant limitée par les conditions (138).

Or chacune des expressions

$$(139') \qquad [\nu_i + 1 \dots \nu_{i+1}]$$

est indépendante des indices $\beta_1 \dots \beta_q$ puisqu'elle ne depend que des différences réciproques des nombres

$$(140) \qquad \lambda_{\nu_i+1} \, , \lambda_{\nu_i+2} \, , \dots , \lambda_{\nu_{i+1}}$$

et que ces différences, en vertu de (137), s'expriment en fonction des nombres c seuls. La série (139) peut donc s'écrire sous la forme

$$(141) \qquad \sum_{(c)} K^{(c)} \sum_{\beta_1 \dots \beta_q} T^{k_1 \dots k_r}_{\mu_1 \dots \mu_r} ,$$

$K^{(c)}$ désignant l'expression suivante

(142) $$K^{(c)} = (-1)^{r-q}[1 \, . \, . \, \nu_1][\nu_1 + 1 \, . \, . \, \nu_2] \, . \, . \, [\nu_{q-1} + 1 \, . \, . \, \nu_q].$$

L'expression (139') dépend et dépend seulement, de certains des paramètres

$$\alpha_{k,s-t-k}$$

où k est un nombre de la suite

(143) $$k_{\nu_i+1}\,, k_{\nu_i+2}\,, \dots, k_{\nu_{i+1}}$$

et où s et t sont des nombres de la suite

(144) $$\lambda_{\nu_i+1}\,, \lambda_{\nu_i+2}\,, \dots, \lambda_{\nu_{i+1}}.$$

La différence entre deux quelconques des nombres (144) s'exprimant sous la forme

(145) $$\lambda_{\nu_i+\tau} - \lambda_{\nu_i+\sigma} = c_{i,\sigma} + \, . \, . + c_{i,\tau-1}$$

(où l'on suppose $\tau > \sigma$), nous voyons donc que, si

(146) $$\alpha_{k_1,g_1-k_1}\,, \alpha_{k_2,g_2-k_2}\,, \dots, \alpha_{k_r,g_r-k_r}$$

désignent les paramètres qui figurent dans l'expression $K^{(c)}$, chacun des indices $g_1, g_2, \dots, g_r$ (pris, selon les cas, avec le signe + ou —) sera nécessairement égal à la somme de certains des nombres c.

Je dis que,

(147) $$g_1^0\,, g_2^0\,, \dots, g_r^0$$

étant des entiers donnés quelconques, le système d'équations

(148) $$g_1 = g_1^0, \qquad g_2 = g_2^0\,, \quad \dots, \quad g_r = g_r^0$$

où les c sont considérés comme inconnus, n'aura qu'un nombre fini de solutions en entiers positifs.

En effet, puisque $\lambda_{\nu_i+1}, \lambda_{\nu_i+2}, \dots, \lambda_{\nu_{i+1}}$ est une permutation de $\mu_{\nu_i+1}, \mu_{\nu_i+2}, \dots, \mu_{\nu_{i+1}}$, nous pouvons poser

(149) $$\mu_{\nu_i+s} = \lambda_{\nu_i+\tau_s}, \qquad (s=1,2,\dots,\nu_{i+1}-\nu_i)$$

$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{\nu_{i+1}-\nu_i}$ désignant une permutation convenable des nombres $1, 2, \ldots, \nu_{i+1} - \nu_i$. Par conséquent, on peut définir les g par les formules suivantes

$$(150) \qquad g_{\nu_i+s} = \lambda_{\nu_i+\tau_s} - \lambda_{\nu_i+\tau_{s+1}} \qquad {\scriptstyle (s=1,2,\ldots,\nu_{i+1}-\nu_i;\ i=0,1,\ldots,q-1)}$$

où l'on convient de poser $\tau_{s+1} = \tau_1$ pour $s = \nu_{i+1} - \nu_i$. De cette formule, on peut conclure que chacune des $r - q$ quantités c figure nécessairement dans l'une au moins des équations (148); car, τ_a désignant l'un quelconque des nombres $1, 2, \ldots, \nu_{i+1} - \nu_i$ (excepté l'unité) et $\tau_{\beta+1}$ celui qui est égal à *un*, on aura, en vertu de (150)

$$\sum_{s=a}^{\beta} g_{\nu_i+s} = \lambda_{\nu_i+\tau_a} - \lambda_{\nu_i+1}$$

pourvu que $a \leqq \beta$ et

$$\sum_{s=\beta+1}^{a-1} g_{\nu_i+s} = \lambda_{\nu_i+1} - \lambda_{\nu_i+\tau_a}$$

pourvu que $a \geqq \beta + 2$ (a ne peut être $= \beta + 1$ car on aurait alors $\tau_a = 1$, contrairement à l'hypothèse). Donc, dans tous les cas, on voit d'après la formule (145) que l'inconnue c_{i,τ_a-1} figure dans la somme de certains des g et, par conséquent, dans l'une au moins de ces expressions.

Or, en vertu de la forme des g, chaque équation $g_k = g_k^0$ n'aura, pour les inconnues qui y figurent, qu'un nombre limité de solutions en entiers positifs. Par conséquent, on voit bien qu'il y a seulement un nombre fini de combinaisons des indices positifs c qui peuvent satisfaire aux équations (148).

Pour trouver l'ensemble de ceux des termes de la série (141) qui dépendent, et dépendent uniquement, des paramètres suivants

$$(151) \qquad \alpha_{k_1, g_1^0-k_1}, \alpha_{k_2, g_2^0-k_2}, \ldots, \alpha_{k_r, g_r^0-k_r},$$

il faut limiter la sommation par rapport aux indices c à celles des combinaisons qui vérifient au moins un des $\underline{|r}$ systèmes d'équations suivants

$$g_1 = g_{\beta_1}^0, \qquad g_2 = g_{\beta_2}^0, \quad \ldots, \quad g_r = g_{\beta_r}^0,$$

où $\beta_1 \ldots \beta_r$ désignent successivement toute permutation des r nombres $1, 2, \ldots, r$.

Ces combinaisons étant en nombre nécessairement limité, nous voyons donc que le coefficient par lequel est multiplié, dans la série (141), le produit des r paramètres (151), s'exprime linéairement et à coefficients rationnels par rapport à certaines séries de la forme

$$\sum_{\beta_1 \ldots \beta_q} T^{k_1 \ldots k_r}_{\mu_1 \ldots \mu_r}. \tag{152}$$

Donc, si nous développons l'expression $\pi(\rho) S^{(r)}$ selon les divers produits qu'on peut former par r des paramètres α, c'est-à-dire si nous écrivons

$$\pi(\rho) S^{(r)} = \sum_{k_1 \ldots k_r} \sum_{g_1 \ldots g_r} U^{k_1 \ldots k_r}_{g_1 \ldots g_r} \alpha_{k_1, g_1 - k_1} \ldots \alpha_{k_r, g_r - k_r}, \tag{153}$$

la sommation par rapport aux $k_1 \ldots k_r$ s'étendant à toute permutation de r nombres de la suite $2, 3, \ldots, n$ et celle par rapport aux $g_1 \ldots g_r$ à toute permutation de r nombres de la suite

$$-p, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, +\infty, \tag{154}$$

chaque coefficient $U^{k_1 \ldots k_r}_{\mu_1 \ldots \mu_r}$ s'exprimera linéairement et à coefficient rationnels par rapport à un nombre fini de séries de la forme

$$\pi(\rho) \cdot \sum_{\beta_1 \ldots \beta_q} T^{k_1 \ldots k_r}_{\mu_1 \ldots \mu_r}, \tag{155}$$

19. Nous nous trouvons donc amené à étudier d'abord les séries de la forme (152).

En permutant les indices $1, 2, \ldots, r$ des nombres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ d'une manière convenable, on obtient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$; désignant par $l_1, l_2, \ldots, l_r$ la permutation correspondante des nombres $k_1, k_2, \ldots, k_r$, on pourra, en vertu de la formule (135), écrire $T^{k_1 \ldots k_r}_{\mu_1 \ldots \mu_r}$ sous la forme

$$T^{k_1 \ldots k_r}_{\mu_1 \ldots \mu_r} = \frac{1}{(\rho + \lambda_1 - n + l_1)_{l_1} (\rho + \lambda_2 - n + l_2)_{l_2} \ldots (\rho + \lambda_r - n + l_r)_{l_r}} \tag{156}$$

ou, en posant

$$
(157)\qquad
\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{\nu_1}(\rho+\lambda_i-n+l_i)_{l_i}=\psi_1(\rho+\beta_1),\\
&\prod_{i=\nu_1+1}^{\nu_2}(\rho+\lambda_i-n+l_i)_{l_i}=\psi_2(\rho+\beta_2),\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\prod_{i=\nu_{q-1}+1}^{\nu_q}(\rho+\lambda_i-n+l_i)_{l_i}=\psi_q(\rho+\beta_q),
\end{aligned}
$$

$$
(158)\qquad T^{k_1..k_r}_{\mu_1..\mu_r}=\frac{1}{\psi_1(\rho+\beta_1)\psi_2(\rho+\beta_2)\,..\,\psi_q(\rho+\beta_p)}.
$$

D'après (157), chaque fonction $\psi_k(\rho+\beta_k)$ est une fonction entière rationnelle de degré

$$
\sum_{i=\nu_{k-1}+1}^{\nu_k} l_k
$$

par rapport à $\rho+\beta_k$, ayant pour coefficients des nombres entiers qui ne dépendent que de n, de $k_1, .., k_r$ et des nombres c.

La série (152) prend donc la forme suivante

$$
(159)\qquad \sum_{\beta_1..\beta_q}\frac{1}{\psi_1(\rho+\beta_1)\psi_2(\rho+\beta_2)\,..\,\psi_q(\rho+\beta_q)},
$$

la sommation s'étendant à toutes les permutations de q nombres de la suite $0, 1, .., +\infty$, excepté celles pour lesquelles une ou plusieurs des égalités

$$
(160)\qquad
\begin{aligned}
&\beta_{i+1}=\beta_{j+1},\\
&\beta_{i+1}+c_{i.1}+..+c_{i.\tau-1}=\beta_{j+1}+c_{j.1}+..+c_{j.\sigma-1},
\end{aligned}
$$

$$
(i \gtrless j\,;\ \tau=2, 3, .., \nu_{i+1}-\nu_i\,;\ \sigma=2, 3, .., \nu_{j+1}-\nu_j\,;\ i, j=0, 1, .., q-1)
$$

sont vérifiées. Cette série, qui représente manifestement une fonction de ρ méromorphe dans tout domaine fini, sera désignée par $F(\rho)$. Pour en évaluer la valeur en fonction des fonctions élémentaires de l'analyse, nous pouvons procéder de la manière suivante.

Si, dans la série (159), nous n'assujettissons les indices $\beta_1 .. \beta_q$ à

aucunes conditions, la somme S de cette série sera égale au produit des q séries simples:

$$(161) \qquad \sum_{\beta_1} \frac{1}{\psi_1(\rho + \beta_1)}, \qquad \sum_{\beta_2} \frac{1}{\psi_2(\rho + \beta_2)}, \quad \ldots, \quad \sum_{\beta_q} \frac{1}{\psi_q(\rho + \beta_q)};$$

d'un autre côté, on peut écrire

$$S = F_0 + F_1 + F_2 + \ldots$$

$F_0 = F(\rho)$ désignant l'ensemble de ceux des termes de S dont les indices $\beta_1 \ldots \beta_q$ ne satisfont à aucune des relations (160), F_1 désignant l'ensemble de ceux dont les indices $\beta_1 \ldots \beta_q$ vérifient une, et une seule, des relations (160), F_2 désignant l'ensemble de ceux dont les indices $\beta_1 \ldots \beta_q$ vérifient deux, et deux seules, des relations (160), et ainsi de suite.

Or, assujettir, dans une série multiple d'ordre q, les indices à remplir une ou plusieurs relations linéaires, cela revient à la transformer en une série multiple d'ordre inférieur à q. Donc notre série $F(\rho)$ s'exprime en fonction rationnelle et entière par rapport à certaines séries, de la même forme d'ailleurs, mais dont l'ordre de multiplicité est inférieur à q. Opérant de la même manière sur chacune de ces séries et procédant ainsi de proche en proche, nous voyons qu'on peut exprimer $F(\rho)$ en fonction rationnelle et entière par rapport à un certain nombre de séries *simples* dont chacune est de la forme suivante

$$(162) \qquad \sum_{\beta=0}^{+\infty} \frac{1}{\psi_{\delta_1}(\rho + \gamma_1 + \beta)\psi_{\delta_2}(\rho + \gamma_2 + \beta)\ldots\psi_{\delta_s}(\rho + \gamma_s + \beta)},$$

s désignant un nombre de la suite $1, 2, \ldots, q$, les $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s$ des nombres de la même suite et $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ étant des entiers qui ne dépendent que des nombres c.

Si nous posons

$$\Phi(\rho + \beta) = \psi_{\delta_1}(\rho + \gamma_1 + \beta)\psi_{\delta_2}(\rho + \gamma_2 + \beta)\ldots\psi_{\delta_s}(\rho + \gamma_s + \beta)$$

$\Phi(\rho + \beta)$ sera une fonction entière rationnelle de $\rho + \beta$, ayant pour coefficients des nombres entiers et pour racines des nombres entiers aussi. Soient

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_t$$

les racines distinctes de $\Phi(\rho+\beta)$, et

$$x_1, x_2, \ldots, x_t$$

leurs ordres de multiplicité. Nous pouvons écrire

$$\frac{1}{\Phi(\rho+\beta)}=\sum_{\nu=1}^{t}\left[\frac{B_\nu}{\rho+\beta-\varepsilon_\nu}+\sum_{\lambda=1}^{x_\nu-1}B_{\nu\lambda}\frac{d^\lambda}{d\rho^\lambda}\frac{1}{\rho+\beta-\varepsilon_\nu}\right],$$

les B_ν et les $B_{\nu\lambda}$ désignant des nombres rationnels; d'ailleurs, le degré de la fonction $\Phi(\rho+\beta)$ étant égal ou supérieur à 2, les résidus B_ν satisfont nécessairement à la relation

$$\sum_{\nu=1}^{t}B_\nu=0;$$

donc l'égalité précédente (où nous supposerons $\beta>0$) ne cessera pas d'être vraie si nous retranchons du second membre la somme

$$\sum_{\nu=1}^{t}\frac{B}{\beta}.$$

Ceci posé, désignons par $\theta(\rho)$ la fonction suivante

$$\theta(\rho)=\frac{1}{\rho}+\sum_{\beta=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{\rho+\beta}-\frac{1}{\beta}\right].$$

(D'après les formules connues relatives à la fonction Γ, on a la relation

$$\theta(\rho)=-\frac{\Gamma'(\rho)}{\Gamma(\rho)}-C,$$

$\Gamma(\rho)$ désignant, selon l'usage, la fonction Eulérienne définie par la formule

$$\frac{1}{\Gamma(\rho)}=e^{C\rho}\rho\prod_{\beta=1}^{+\infty}\left(1+\frac{\rho}{\beta}\right)e^{-\frac{\rho}{\beta}}$$

et C la constante dite d'EULER.)

Nous obtiendrons

$$\sum_{\beta=0}^{+\infty}\frac{1}{\Phi(\rho+\beta)}=\sum_{\nu=1}^{t}\left[B_\nu\theta(\rho-\varepsilon_\nu)+\sum_{\lambda=1}^{x_\nu-1}B_{\nu\lambda}\theta^{(\lambda)}(\rho-\varepsilon_\nu)\right].$$

Or, d'après les propriétés de la fonction θ, on a, en désignant par ε un entier positif quelconque:

$$\theta(\rho-\varepsilon)=\frac{1}{\rho-\varepsilon}+\frac{1}{\rho-\varepsilon+1}+\ldots+\frac{1}{\rho-1}+\theta(\rho),$$

et, quand ε désigne un entier négatif quelconque $=-\eta$:

$$-\theta(\rho+\eta)=\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho+1}+\ldots+\frac{1}{\rho+\eta-1}-\theta(\rho).$$

Donc la série (162) peut être considérée comme la somme de deux fonctions dont l'une est linéaire et homogène, à coefficients rationnels, par rapport à $\theta(\rho)$ et à quelques-unes des dérivées de cette fonction, tandis que l'autre s'exprime en fonction entière et rationnelle, à coefficients rationnels, par rapport aux quantités suivantes

(163)
$$\begin{aligned}&\frac{1}{\rho-\varepsilon},\ \frac{1}{\rho-\varepsilon+1},\ \ldots,\ \frac{1}{\rho-1},\\ &\frac{1}{\rho},\ \frac{1}{\rho+1},\ \ldots,\ \frac{1}{\rho+\eta-1},\end{aligned}$$

(où ε désigne successivement tous ceux des nombres ε_ν qui sont positifs et $-\eta$ tous ceux qui sont négatifs).

On en conclut que la série $F(\rho)$ s'exprime en fonction entière rationnelle, à coefficient rationnels, par rapport aux fonctions

(164)
$$\theta(\rho),\ \theta'(\rho),\ \ldots,\ \theta^{x}(\rho)$$

(x désignant un entier positif dépendant de r, facile à calculer dans chaque cas particulier et auquel il serait facile, dans le cas général, d'assigner une limite supérieure) et aux fonctions (163) (où ε et η désignent certains entiers dépendant uniquement des nombres c).

Posant, pour abréger,

(165)
$$\vartheta(\rho)=\rho\prod_{i=1}^{+\infty}\left(1+\frac{\rho}{i}\right)e^{-\frac{\rho}{i}},$$

on peut, en vertu de la définition (121), écrire la fonction $\pi(\rho)$ sous la forme

$$(166) \qquad \pi(\rho) = \vartheta(\rho)\vartheta(\rho - 1)\ldots\vartheta(\rho - n + 1).$$

On en obtient, d'après des formules bien connues relatives à la fonction Γ,

$$\pi(\rho) = E.(\rho - 1)^{n-1}(\rho - 2)^{n-2}\ldots(\rho - n + 1)(\vartheta(\rho))^n,$$

E désignant la constante

$$E = e^{\frac{n(n-1)}{2}C};$$

d'ailleurs, entre les fonctions $\theta(\rho)$ et $\vartheta(\rho)$ on a la relation suivante

$$\theta(\rho) = \frac{\vartheta'(\rho)}{\vartheta(\rho)}.$$

Par suite, chaque expression de la forme (155) (divisée par la constante E) est une fonction entière et rationnelle, à coefficients rationnels, par rapport à ρ, à $\vartheta(\rho)$, aux fonctions (164) et aux fonctions (163).

Donc, d'après ce que nous avons vu, chaque coefficient $U^{k_1 \ldots k_r}_{q_1 \ldots q_r}$ du développement (153) s'exprime aussi sous cette forme.

20. Ayant ainsi trouvé la forme analytique sous laquelle se présente le déterminant $\begin{pmatrix} -p & \ldots & -1 \\ -p & \ldots & -1 \end{pmatrix}$ quand on le développe en série procédant suivant les puissances croissantes des paramètres $\alpha_{i,k}$, il sera facile de le développer selon les puissances croissantes de ρ.

Dans le voisinage de $\rho = 0$, la fonction $\theta(\rho)$ peut, comme on sait, se développer de la manière suivante:

$$\theta(\rho) = \frac{1}{\rho} + \rho\mathfrak{P}(\rho)$$

$\mathfrak{P}(\rho)$ étant une série procédant selon les puissances positives de ρ et dont les coefficients ont (aux signes près) les valeurs

$$\tau_2, \tau_3, \tau_4, \ldots, \tau_k, \ldots$$

τ_k désignant le nombre suivant:

(167) $$\tau_k = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots \qquad (k=2,3,\dots)$$

Quant aux fonctions de la forme (163), chacune d'elles, développée selon les puissances croissantes de ρ, aura pour coefficients des nombres rationnels et ne contiendra, au plus, qu'une seule puissance négative de ρ.

Enfin, la fonction $\vartheta(\rho)$ est une fonction entière de ρ dont les coefficients sont des polynômes entiers, à coefficients rationnels, par rapport aux nombres τ.

Dans le développement de $U^{k_1 \dots k_r}_{g_1 \dots g_r}$ selon les puissances croissantes de ρ, les puissances négatives de ρ disparaîtront nécessairement, puisque $U^{k \dots k_r}_{g \dots g_r}$ est une fonction entière de ρ. Donc cette fonction (divisée par E) se développe en une série procédant selon les puissances positives de ρ dont les coefficients sont rationnels par rapport aux τ.

Donc, la série du second membre de (129) pouvant, en vertu de sa convergence uniforme, être écrite sous la forme d'une série entière par rapport à ρ, nous arrivons à cette conclusion:

Le déterminant $\begin{pmatrix} -p & . & . & -1 \\ -p & . & . & -1 \end{pmatrix}$ *est une fonction entière de* ρ *dont les coefficients sont des séries absolument convergentes procédant selon les puissances des paramètres* α*; dans chacune de ces séries, les coefficients (divisés par la constante* E*) sont des polynômes entiers, à coefficients rationnels, par rapport aux nombres* τ.

21. La méthode précédente pour le développement du déterminant $\begin{pmatrix} -p & . & . & -1 \\ -p & . & . & -1 \end{pmatrix}$ s'applique à tout déterminant de la forme (115). En effet, on peut obtenir l'un quelconque des déterminants (115) en supprimant, dans $\begin{pmatrix} -p & . & . & -1 \\ -p & . & . & -1 \end{pmatrix}$, certaines lignes et certaines colonnes et en y remplaçant certaines lignes et certaines colonnes par des lignes et des colonnes convenablement choisies dans la matrice des éléments χ_{ik}; et on voit facilement que ces opérations n'altèrent pas essentiellement la forme analytique et les propriétés générales du déterminant considéré. Ce n'est qu'à fin

de simplifier les formules que nous nous sommes borné à l'étude de $\begin{pmatrix} -p & \cdot\cdot & -1 \\ -p & \cdot\cdot & -1 \end{pmatrix}$. Aussi les conclusions précédentes relatives à ce déterminant subsistent-elles sans modification pour le cas d'un déterminant quelconque de la forme (115).

§ 4.

22. Considérons, en particulier, le cas où l'équation proposée (15) a pour coefficients des fonctions rationnelles de x. On pourra l'écrire sous la forme

$$(168) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{Q_2}{Q_0}\frac{1}{x^{2+p}}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \frac{Q_3}{Q_0}\frac{1}{x^{3+p}}\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \ldots + \frac{Q_n}{Q_0}\frac{1}{x^{n+p}}y = 0,$$

$Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ désignant des polynômes entiers en x qui ne s'annulent pas tous pour $x = 0$, Q_0 un polynôme semblable qui ne s'annule pas pour $x = 0$ et p un entier convenable.

Si $p \leqq 0$, l'équation (168) appartiendra visiblement, dans le voisinage de $x = 0$, à la classe simple des équations régulières. Nous pouvons donc nous borner au cas ou l'on a $p > 0$.

Développons les Q selon les puissances de x:

$$(169) \qquad Q_\nu = \beta_{\nu 0} + \beta_{\nu 1}x + \beta_{\nu 2}x^2 + \ldots + \beta_{\nu m}x^m \qquad (\nu = 0, 2, 3, \ldots, n)$$

et supposons, ce qui est évidemment permis, que β_{00}, c'est-à-dire le terme indépendant de x dans le développement de Q_0, soit égal à *un*.

Cela posé, nous pouvons écrire, dans un certain voisinage de $x = 0$,

$$(170) \qquad \frac{Q_r}{Q_0}\frac{1}{x^{r+p}} = \sum_{\lambda=-r-p}^{+\infty} \alpha_{r\lambda}x^\lambda, \qquad (r = 2, 3, \ldots, n)$$

les $\alpha_{r\lambda}$ désignant des fonctions entières rationnelles, à coefficients rationnels, par rapport aux $\beta_{r\lambda}$ et aux $\beta_{0\lambda}$. En convenant de considérer chacun des $\beta_{r.0}$ comme homogène et de degré 1 par rapport à une variable auxiliaire t, chacun des $\beta_{r.1}$ comme homogène et de degré $2, \ldots$, chacun des $\beta_{r.m}$ comme homogène et de degré $m + 1$ mais chacun des $\beta_{0.\lambda}$ comme homogène et de degré λ, on voit que le coefficient $\alpha_{r,-r-p}$ sera homogène

et de degré 1, que $\alpha_{r,-r-p+1}$ sera homogène et de degré $2, \ldots,$ que $\alpha_{r,-r-p+k}$ sera homogène et de degré $k+1$, et ainsi de suite.

Cela étant, considérons les déterminants (83), définis, comme il a été expliqué, en fonction de ρ et des paramètres $\alpha_{r\lambda}$; nous avons vu que, abstraction faite du facteur E, chacun d'eux peut être mis sous la forme d'une série entière

$$(171) \qquad S_0 + S_1\rho + S_2\rho^2 + \ldots$$

où chacun des coefficients S_ν est une série absolument convergente, procédant selon les puissances des paramètres $\alpha_{r\lambda}$ et ayant pour coefficients des polynômes entiers, à coefficients rationnels, par rapport aux nombres τ. Exprimant les $\alpha_{r\lambda}$ en fonction des $\beta_{r\lambda}$, on voit sans difficulté que chaque série S_ν converge uniformément par rapport aux $\beta_{r\lambda}$ à l'intérieur d'un domaine fini quelconque; par conséquent, les S_ν sont des fonctions entières par rapport aux $\beta_{r\lambda}$.

D'après la convention faite plus haut, un produit quelconque de la forme

$$(172) \qquad \alpha_{k_1,g_1-k_1}\alpha_{k_2,g_2-k_2}, \ldots, \alpha_{k_r,g_r-k_r}$$

est du degré

$$(173) \qquad (g_1+p+1)+\ldots+(g_r+p+1)$$

par rapport à t. La série S_ν étant ordonnée selon les produits (172) (r prenant successivement les valeurs $1, 2, \ldots, +\infty$), chacun des indices $g_1, g_2, \ldots, g_r$ d'un terme quelconque sera supérieur ou égal à $-p$. On en conclut qu'il n'y a, dans S_ν, qu'un nombre fini de combinaisons des indices g pour lesquelles l'expression (173) prend une valeur donnée; autrement dit, si μ désigne un entier positif quelconque, il n'y a, dans S_ν, qu'un nombre fini de termes de degré μ par rapport à t.

Or, ordonner la série (171) selon les puissances croissantes de t, cela revient évidemment à l'ordonner selon les puissances croissantes des paramètres β. D'où cet énoncé:

Chacune des fonctions déterminantes de l'équation (168) *est une fonction entière de ρ dont les coefficients, considérés comme fonctions des paramètres β, sont des fonctions entières ayant pour coefficients des polynômes entiers, à coefficients rationnels, par rapport aux nombres τ.*

23. Soit, dans la suite des paramètres suivants:

$$(174) \qquad \beta_{20}, \beta_{30}, \ldots, \beta_{n0},$$

$\beta_{\sigma 0}$ le premier qui n'est pas nul. L'équation déterminante, relative à $x = 0$, sera évidemment

$$(175) \qquad f(\rho) \equiv \beta_{\sigma.0}\rho(\rho - 1)\ldots(\rho - n + \sigma + 1)$$
$$+ \beta_{\sigma+1.0}\rho(\rho - 1)\ldots(\rho - n + \sigma + 2) + \ldots + \beta_{n.0} = 0.$$

Pour que les α se trouvent à l'intérieur d'un domaine T, défini par des conditions de la forme (80) et (80'), il suffit que les β satisfassent aux conditions suivantes

$$(176) \qquad \beta_{00} = 1; \quad |\beta_{r\lambda}| \leq \beta^0_{r\lambda}, \qquad (r = 0, 2, 3, \ldots, n; \lambda = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

$$(176') \qquad |\beta_{\sigma.0}| \geq \theta$$

les $\beta^0_{r\lambda}$ désignant des constantes positives (ou nulles) quelconques et θ une quantité positive (non nulle) quelconque. Appelons U le domaine des paramètres β défini par ces conditions.

D'après ce que nous avons vu, on peut toujours, par une suite finie d'opérations arithmétiques, trouver un entier λ et λ fonctions entières de ρ:

$$(177) \qquad F_1(\rho), F_2(\rho), \ldots, F_\lambda(\rho)$$

qui jouent le rôle de fonctions déterminantes pour l'équation considérée, relativement au point singulier $x = 0$, tant que les paramètres β restent à l'intérieur du domaine U. R désignant l'une quelconque des racines de l'équation déterminante, nous savons que les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un nombre donné μ d'intégrales régulières appartenant à R s'expriment en disant que les fonctions (177) doivent, pour $\rho = R$, s'annuler de l'ordre μ; et de là se déduisent immédiatement les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (168) possède, dans le voisinage de $x = 0$, un nombre donné s d'intégrales régulières.

Proposons-nous maintenant de traduire ces conditions en *relations* entre les paramètres.

Ceci se fait sans difficulté dans le cas où toutes les racines de l'équation $f(\rho) = 0$ sont incongruentes. En effet, désignons par

$$(178) \qquad R_1, R_2, \ldots, R_{n-\sigma}$$

les racines de $f(\rho) = 0$, par

$$t\,,\, u_1\,,\, u_2\,,\, \ldots\,,\, u_\lambda$$

$\lambda + 1$ variables auxiliaires et par $G(tu_1 \ldots u_\lambda)$ le produit suivant

$$(179) \qquad \prod_{\nu=1}^{n-\sigma}(t - u_1 F_1(R_\nu) - u_2 F_2(R_\nu) - \ldots - u_\lambda F_\lambda(R_\nu));$$

il suffira d'écrire que $G(tu_1 \ldots u_\lambda)$, considérée comme fonction de t, a s racines nulles quelles que soient les valeurs des variables $u_1 \ldots u_\lambda$; ce qui conduit à un certain nombre de relations de la forme

$$(180) \qquad H(R_1\,,\, R_2\,,\, \ldots\,,\, R_{n-\sigma}) = 0,$$

H désignant une fonction entière et symétrique par rapport aux racines (178) et étant, par suite, représentable par un développement de la forme

$$(181) \qquad H = H_0 + H_1 + H_2 + \ldots + H_\nu + \ldots,$$

H_ν désignant un polynôme homogène et symétrique de degré ν par rapport aux R. D'après la propriété des fonctions (177) établie au numéro précédent, on voit que, dans chacun des polynômes H_ν, les coefficients sont des fonctions entières par rapport aux $\beta_{r\lambda}$ dont les coefficients (divisés par la constante E) sont des polynômes, à coefficients rationnels, par rapport aux nombres τ.

Or, écrivant $f(\rho)$ sous la forme

$$(182) \qquad f(\rho) = \beta_{\sigma.0}(\rho^{n-\sigma} + f_1\rho^{n-\sigma-1} + f_2\rho^{n-\sigma-2} + \ldots + f_{n-\sigma})$$

et convenant de considérer $f_1\,,\, f_2\,,\, \ldots\,,\, f_{n-\sigma}$ comme des quantités homogènes des degrés respectifs $1\,,\, 2\,,\, \ldots\,,\, n - \sigma$ par rapport à une variable auxiliaire t, on sait que tout polynôme homogène symétrique et de degré ν par rapport aux racines R, peut s'écrire sous la forme d'un polynôme en $f_1\,,\, f_2\,,\, \ldots\,,\, f_{n-\sigma}$, homogène et de degré ν par rapport à t. Chacun des coefficients f (multipliée par $\beta_{\sigma.0}$) s'exprimant en fonction linéaire et homogène, à coefficients entiers, par rapport aux paramètres $\beta_{\sigma+1,0}\,,\, \beta_{\sigma+2,0}\,,\, \ldots\,,\, \beta_{n,0}$, on en conclut que toute fonction telle que H est une fonction entière par rapport à $\frac{1}{\beta_{\sigma.0}}$ et aux $\beta_{r.\lambda}$, ayant pour coefficients des polynômes entiers, à coefficients rationnels, par rapport aux τ.

Toutefois, les relations ainsi obtenues cessent d'exprimer les conditions dont il s'agit dès que deux ou plusieurs des racines R deviennent congruentes. Pour obtenir des formules qui embrassent tous les cas possibles, il faudra modifier la méthode précédente. Tout d'abord, nous avons besoin de quelques considérations préliminaires relatives à la divisibilité de fonctions entières.

24. Soient

$$\psi(\rho) = a_0 + a_1\rho + \cdots + a_{m-1}\rho^{m-1} + \rho^m,$$
$$F(\rho) = b_0 + b_1\rho + \cdots + b_{m-1}\rho^{m-1} + b_m\rho^m + \cdots$$

deux fonctions de ρ dont l'une $\psi(\rho)$ est entière et rationnelle de degré m, l'autre $F(\rho)$ entière (rationnelle ou transcendante). Pour trouver les relations entre les a et les b qui sont nécessaires et suffisantes pour que $\psi(\rho)$ et $F(\rho)$ possèdent un facteur commun de degré s, nous emploierons la méthode suivante.

Soient

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$$

m quantités arbitraires que nous supposerons d'abord différentes entre elles. Si nous écrivons

$$(183)\quad \begin{aligned} F(\rho_1) &= A_0, \\ F(\rho_2) &= A_0 + A_1(\rho_2 - \rho_1), \\ F(\rho_3) &= A_0 + A_1(\rho_3 - \rho_1) + A_2(\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(\rho_m) &= A_0 + A_1(\rho_m - \rho_1) + \cdots + A_{m-1}(\rho_m - \rho_1)(\rho_m - \rho_2)\cdots(\rho_m - \rho_{m-1}) \end{aligned}$$

les coefficients $A_{\nu-1}$ auront les valeurs

$$A_{\nu-1} = \begin{vmatrix} 1, & \rho_1, & \ldots, & \rho_1^{\nu-2}, & F(\rho_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & \rho_\nu, & \ldots, & \rho_\nu^{\nu-2}, & F(\rho_\nu) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & \rho_1, & \ldots, & \rho_1^{\nu-2}, & \rho_1^{\nu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & \rho_\nu, & \ldots, & \rho_\nu^{\nu-2}, & \rho_\nu^{\nu-1} \end{vmatrix} \quad (\nu=1,2,\ldots,m)$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(183') \qquad A_{\nu-1} = \frac{F(\rho_1)}{\varphi'_\nu(\rho_1)} + \frac{F(\rho_2)}{\varphi'_\nu(\rho_2)} + \ldots + \frac{F(\rho_\nu)}{\varphi'_\nu(\rho_\nu)} \qquad (\nu=1,2,\ldots,m)$$

$\varphi_\nu(\rho)$ désignant la fonction suivante

$$\varphi_\nu(\rho) = (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)\ldots(\rho - \rho_\nu).$$

$A_{\nu-1}$, considéré comme fonction de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$, étant visiblement une fonction entière, nous pouvons poser

$$(184) \qquad A_{\nu-1} = \theta(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu) \qquad (\nu=1,2,\ldots,m)$$

en désignant par $\theta(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu)$ une fonction entière par rapport aux $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ ayant pour coefficients des polynômes à coefficients rationnels par rapport aux b.

Ceci posé, désignons par $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ les racines de $\psi(\rho)$; je dis que la condition nécessaire et suffisante pour que $F(\rho)$ et $\psi(\rho)$ admettent un diviseur commun de degré s consiste en ceci: on doit avoir, pour une permutation convenable $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$ de s des racines de $\psi(\rho)$,

$$(185) \qquad \theta(\rho_1) = 0, \qquad \theta(\rho_1, \rho_2) = 0, \quad \ldots, \quad \theta(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s) = 0.$$

C'est ce qui est évident dans le cas où toutes les racines de $\psi(\rho)$ sont différentes car, dans ce cas, les équations (185) sont, en vertu des relations (183), équivalentes aux suivantes:

$$F(\rho_1) = 0, \qquad F(\rho_2) = 0, \quad \ldots, \quad F(\rho_s).$$

Pour le démontrer d'une manière générale, remarquons d'abord que les équations (185) sont équivalentes aux suivantes

$$(185') \qquad \theta(\rho_{\alpha_1}) = 0, \qquad \theta(\rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_2}) = 0, \ldots, \theta(\rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_2}, \ldots, \rho_{\alpha_s}) = 0,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ désignant une permutation quelconque des nombres $1, 2, \ldots, s$; on a, en effet, en vertu des formules (183),

$$\begin{aligned}
\theta(\rho_{\alpha_1}) &= A_0 + H_{1.1}A_1 + H_{12}A_2 + \ldots + H_{1.s-1}A_{s-1},\\
\theta(\rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_2}) &= \qquad\quad A_1 + H_{22}A_2 + \ldots + H_{2.s-1}A_{s-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\theta(\rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_2}, \ldots, \rho_{\alpha_s}) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad A_{s-1},
\end{aligned}$$

les H désignant certaines expressions entières et rationnelles par rapport aux ρ; en d'autres termes, on peut passer du système des fonctions

$$\theta(\rho_1)\,,\ \theta(\rho_1\,,\rho_2)\,,\ldots,\ \theta(\rho_1\,,\rho_2\,,\ldots,\rho_\nu)$$

à celui des fonctions

$$\theta(\rho_{a_1})\,,\ \theta(\rho_{a_1}\,,\rho_{a_2})\,,\ldots,\ \theta(\rho_{a_1}\,,\rho_{a_2}\,,\ldots,\rho_{a_\nu})$$

par une substitution linéaire de la forme

$$\begin{vmatrix} 1\,, & H_{1.1}\,, & \ldots, & H_{1.\nu-1} \\ & 1\,, & \ldots, & H_{2.\nu-1} \\ & & \ldots & . \\ & & & 1 \end{vmatrix}$$

ce qui prouve bien l'équivalence des systèmes d'équations (185) et (185').

Si les racines

$$(186) \qquad \rho_1\,,\rho_2\,,\ldots,\rho_\nu$$

ne sont pas toutes distinctes, nous les supposerons rangées de la manière suivante

$$\bar\rho_1 = \ldots = \bar\rho_\alpha \neq \rho_{\alpha+1} = \ldots = \bar\rho_\beta \neq \ldots \neq \bar\rho_{\lambda+1} = \ldots = \bar\rho_\nu$$

c'est-à-dire nous désignerons par $\bar\rho_1\,,\bar\rho_{\alpha+1}\,,\bar\rho_{\beta+1}\,,\ldots,\bar\rho_{\lambda+1}$ les racines distinctes, par $\bar\rho_1\,,\bar\rho_2\,,\ldots,\bar\rho_\alpha$ celles égales a $\bar\rho_1$, par $\bar\rho_{\alpha+1}\,,\bar\rho_{\alpha+2}\,,\ldots,\bar\rho_\beta$ celles égales à $\bar\rho_{\alpha+1}$ et ainsi de suite.

En vertu des relations (183) on a (en supposant d'abord les ρ distinctes)

$$\theta(\bar\rho_1\,,\bar\rho_2\,,\ldots,\bar\rho_\nu) = \frac{\theta(\bar\rho_1\,,\bar\rho_2\,,\ldots,\bar\rho_{\nu-1}) - \theta(\bar\rho_1\,,\bar\rho_2\,,\ldots,\bar\rho_{\nu-2}\,,\bar\rho_\nu)}{\bar\rho_{\nu-1} - \bar\rho_\nu}$$

d'où se conclut que l'on a, pour $\bar\rho_1 = \bar\rho_2 = \ldots = \bar\rho_\alpha$:

$$\theta(\bar\rho_1\,,\bar\rho_2\,,\ldots,\bar\rho_\nu) = \frac{d^{\nu-1}F(\bar\rho_1)}{d\bar\rho_1^{\nu-1}}. \qquad {\scriptstyle (\nu=2,3,\ldots,\alpha)}$$

Si, dans les équations (185′), nous prenons $\rho_{a_1} = \bar{\rho}_1$, $\rho_{a_2} = \bar{\rho}_2$, .., $\rho_{a_s} = \bar{\rho}_s$ les α premières de ces équations seront donc équivalentes aux suivantes

(187) $$F(\bar{\rho}_1) = 0, \qquad F'(\bar{\rho}_1) = 0 \ , \quad \ldots \ , \quad F^{(\alpha-1)}(\bar{\rho}_1) = 0.$$

On a de même, pour $\bar{\rho}_{\alpha+1} = \bar{\rho}_{\alpha+2} = \ldots = \bar{\rho}_\beta$:

$$\theta(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \ldots, \bar{\rho}_\nu) = \frac{\partial^{\nu-\alpha-1}}{\partial \bar{\rho}_{\alpha+1}^{\nu-\alpha-1}} \theta(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \ldots, \bar{\rho}_{\alpha+1}); \qquad {\scriptstyle (\nu=\alpha+2,\ldots,\beta)}$$

or, en vertu des relations (183′) et des α premières des relations (185′), on obtient

$$\theta(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \ldots, \bar{\rho}_{\alpha+1}) = \frac{F(\bar{\rho}_{\alpha+1})}{(\bar{\rho}_{\alpha+1} - \bar{\rho}_1)(\bar{\rho}_{\alpha+1} - \bar{\rho}_2)\ldots(\bar{\rho}_{\alpha+1} - \bar{\rho}_\alpha)}$$

ce qui conduit aux relations suivantes:

(188) $$F(\bar{\rho}_{\alpha+1}) = 0, \quad F'(\bar{\rho}_{\alpha+1}) = 0 \ , \quad \ldots \ , \quad F^{(\beta-\alpha-1)}(\bar{\rho}_{\alpha+1}) = 0.$$

Continuant ainsi de proche en proche, nous voyons que les équations (185′) sont équivalentes à l'ensemble des relations (187), (188), ... On en conclut que les relations (185) expriment bien les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction $F(\rho)$ soit divisible par

$$(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)\ldots(\rho - \rho_s).$$

Formons le produit suivant

(189) $$\prod_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} [u_1 \theta(\rho_{\alpha_1}) + u_2 \theta(\rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_2}) + \ldots + u_s \theta(\rho_{\alpha_1}, \rho_{\alpha_2}, \ldots, \rho_{\alpha_s})]$$

$\alpha_1 \ldots \alpha_s$ désignant successivement toute permutation de s nombres distincts de la suite

$$1, 2, 3, \ldots, m$$

et $u_1, u_2, \ldots, u_s$ étant des variables auxiliaires; pour que $F(\rho)$ et $\psi(\rho)$ admettent un diviseur commun de degré s, il faut et il suffit que ce produit soit nul quels que soient $u_1, u_2, \ldots, u_s$, car, d'après ce que nous avons vu, il faut et il suffit que l'un au moins de ses facteurs s'annule identiquement. Mais de là on est conduit à un certain nombre de relations de la forme

(190) $$H(a, b) = 0$$

$H(a, b)$ désignant une série convergente procédant selon les puissances croissantes de a et de b et ayant pour coefficients des nombres rationnels.

Ces relations (190), qui sont évidemment en nombre fini, expriment donc les conditions dont il s'agit, quelles que soient les valeurs des coefficients a et b.

25. Pour pouvoir appliquer ces résultats au problème que nous avons en vue, il faut démontrer d'abord le théorème suivant:

Pour que l'équation (168) admette un nombre donné s d'intégrales régulières, il faut et il suffit que les fonctions (177) possèdent $s(k-h+1)$ racines en commun avec la fonction suivante

$$f(\rho)f(\rho+1)\,..\,f(\rho+k), \tag{191}$$

k et h désignant des entiers positifs convenables.

Soient, en effet,

$$R_1, R_2, \ldots, R_{n-\sigma} \tag{192}$$

les $n-\sigma$ racines de l'équation déterminante $f(\rho)=0$. Supposant que les paramètres β restent dans l'intérieur du domaine U défini par (176) et (176'), nous pouvons assigner une limite supérieure H aux valeurs absolues des différences

$$R_\mu - R_\nu; \qquad (\mu, \nu = 1, 2, .., n-\sigma)$$

soit h l'entier positif immédiatement supérieur au nombre H et désignons par k un entier quelconque supérieur à h.

Supposons que les racines (192) soient numérotées de telle manière que $R_1, R_2, .., R_\alpha$ désignent les racines incongruentes de $f(\rho)$, et que, de plus, R_ν ait une partie réelle inférieure à celle de toute autre racine de $f(\rho)$ congruente à R_ν (ν désignant successivement $1, 2, .., \alpha$).

Désignons par t_ν le nombre des racines (comptées avec leurs ordres de multiplicité) congruentes à R_ν de sorte qu'on ait

$$t_1 + t_2 + .. + t_\alpha = n - \sigma;$$

soit s_ν l'exposant de la plus haute puissance de $\rho - R_\nu$ qui divise toutes les fonctions (177). Nous aurons la condition suivante

$$s_\nu \leqq t_\nu \qquad (\nu = 1, 2, .., \alpha)$$

et le nombre des intégrales régulières de l'équation (168) sera égal à $s_1 + s_2 + \dots + s_a$. Par conséquent, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de s intégrales régulières peut s'écrire ainsi:

$$s_1 + s_2 + \dots + s_a \geqq s. \tag{193}$$

Les fonctions (177) s'annulent, pour $\rho = R_\nu$, d'ordre s_ν au moins, mais de là on peut conclure que ces fonctions s'annulent du même ordre pour $\rho = R_\nu - \lambda$, λ désignant un entier positif quelconque; car, si elles ne s'annulaient toutes que d'un ordre inférieur à s_ν, le nombre des intégrales régulières appartenant à $R_\nu - \lambda$ serait inférieur à s_ν, ce qui est évidemment contraire à l'hypothèse.

Or, k désignant un entier positif quelconque supérieur à h, la fonction (191) s'annule pour $\rho = R_\nu - \lambda$ d'ordre s_ν au moins, pourvu que l'on ait

$$\lambda \leqq k - h.$$

Par conséquent, le nombre des racines communes aux fonctions (177) et (191) est, au moins, égal à

$$(s_1 + s_2 + \dots + s_a)(k - h + 1);$$

donc, S désignant le nombre exact de ces racines communes, la formule

$$S \geqq s(k - h + 1) \tag{194}$$

exprime une condition *nécessaire* pour l'existence de s intégrales régulières.

Pourvu que k soit suffisamment grand, cette condition nécessaire entraînera la formule (193) et exprimera donc en même temps la condition suffisante.

En effet, toute racine commune aux fonctions (177) et (191) peut s'écrire sous la forme $R_\nu - \lambda$, ν désignant un entier positif convenable et λ un entier positif ou négatif convenable. Or, de résultats précédemment obtenus (cf. n° 10) il résulte que, si toutes les fonctions (177) s'annulent, pour $\rho = R_\nu - \lambda$, d'un certain ordre μ, ces fonctions s'annulent nécessairement aussi, pour $\rho = R_\nu$, de cet ordre μ au moins. Les seules valeurs de ρ pour lesquelles *peut* s'annuler la fonction (191) sont évidemment

$$R_\nu + h, R_\nu + h - 1, \dots, R_\nu, R_\nu - 1, \dots, R_\nu - k. \quad (\nu = 1, 2, \dots, a)$$

Donc, s_ν désignant l'exposant de la plus haute puissance de $\rho - R_\nu$ qui divise toutes les fonctions (177) et (191), on aura

$$(s_1 + s_2 + \ldots + s_a)(k + h + 1) \geqq S;$$

donc, si l'on suppose la condition (194) vérifiée, il vient

$$(s_1 + s_2 + \ldots + s_a)(k + h + 1) \geqq s(k - h + 1).$$

De là et en vertu de la formule

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_a \leqq n - \sigma$$

on obtient

(195) $$(s_1 + s_2 + \ldots + s_a)(k + 1) - s(k + 1) + h(n - \sigma + s) \geqq 0.$$

Si l'entier positif $k + 1$ remplit la condition

(196) $$k + 1 > h(n - \sigma + s),$$

ce que nous supposerons, la formule (195) ne peut évidemment être vraie que si l'on a

(197) $$s_1 + s_2 + \ldots + s_a \geqq s.$$

C. q. f. d.

Il est donc démontré que, si l'on choisit h comme il a été expliqué plus haut et k conformément à la condition (196), le nombre total des intégrales régulières de l'équation (168) est égal au plus grand entier contenu dans le nombre

$$\frac{S}{k - h + 1},$$

S désignant, comme plus haut, le nombre total des racines communes aux fonctions (177) et (191). En d'autres termes, dire que l'équation (168) admet un nombre donné s d'intégrales régulières, cela revient à dire que le nombre des racines communes aux fonctions (177) et (191) est, au moins, égal à $s(k - h + 1)$.

26. Désignons la fonction (191) par $\Phi(\rho)$ et posons

$$F(\rho) = \xi_1 F_1(\rho) + \xi_2 F_2(\rho) + \ldots + \xi_\lambda F_\lambda(\rho),$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\lambda$ désignant des variables auxiliaires. Pour exprimer que l'équation (168) possède s intégrales régulières, il suffira d'écrire que les fonctions $F(\rho)$ et $\Phi(\rho)$ ont $s(k - h + 1)$ racines communes quelles que soient les valeurs de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\lambda$.

En vertu de la formule (175), $\Phi(\rho)$ est une fonction entière rationnelle de ρ de degré

$$(n - \sigma)(k + 1) = m$$

et pourra s'écrire sous la forme

$$\Phi(\rho) = \Phi_0\rho^m + \Phi_1\rho^{m-1} + \ldots + \Phi_m,$$

Φ_0 désignant la puissance $k + 1^{\text{ième}}$ de $\beta_{\sigma.0}$ et les autres Φ_ν, des expressions entières et rationnelles, à coefficients entiers, par rapport aux paramètres β. D'après ce que nous avons vu au n° 23, l'existence d'un nombre donné de racines communes à $F(\rho)$ et $\Phi(\rho)$ s'exprime par un nombre fini de relations de la forme

$$H = 0,$$

H désignant une série procédant selon les puissances de

$$\frac{1}{\Phi_0}, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$$

et des coefficients de $F(\rho)$ et ayant pour coefficients des nombres rationnels; considérée comme fonction de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\lambda$, H est une fonction entière *rationnelle* puisque son degré par rapport aux coefficients de $F(\rho)$ est nécessairement inférieur à un certain nombre fini. Par conséquent, en égalant à zéro chacun des coefficients de la fonction H (considérée comme fonction de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\lambda$) on obtiendra un nombre fini de relations de la forme

$$(198) \qquad K = 0,$$

K désignant une fonction entière par rapport à $\frac{1}{\beta_{\sigma.0}}$ et aux paramètres β, dont les coefficients sont des polynômes entiers, à coefficients rationnels, par rapport aux nombres τ. D'où ce théorème:

Etant donnés une équation différentielle (168), *son ordre n et le degré*

$n - \sigma$ de son équation déterminante, on peut toujours, par une suite finie d'opérations arithmétiques, trouver une suite finie de relations de la forme (198) *qui expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation proposée admette, dans le voisinage de $x = 0$, un nombre donné d'intégrales régulières.*

Ces relations (198) expriment les conditions dont il s'agit tant que les paramètres β restent dans l'intérieur d'un domaine U, fixé arbitrairement à l'avance par des conditions de la forme (176) et (176').

Nous sommes donc parvenu à la solution complète du problème que nous nous étions proposé, à savoir de trouver les *relations* qui expriment l'existence d'un nombre donné d'intégrales régulières d'une équation linéaire donnée. Mais il convient d'ajouter que ce résultat ne permet pas, du moins dans le cas général, de décider, par une suite *finie* d'opérations arithmétiques, si l'équation proposée possède des intégrales régulières ou non; car les seconds membres des relations (198) sont, en général, des fonctions entières *transcendantes*. Nous avons trouvé plus haut (n[os] 14—16), il est vrai, une suite de critères algébriques qui permettent de résoudre le problème dans des cas étendus. Mais en même temps, nous avons reconnu l'existence de certains cas d'exception où les opérations algébriques ne conduisent pas à bonne fin. A cause de ces cas et de la nature transcendante des fonctions K, il n'est pas encore possible de répondre à la question suivante:

Peut-on toujours, par une suite finie d'opérations arithmétiques, décider combien une équation linéaire à coefficients rationnels possède d'intégrales régulières?

La solution de ce problème, si jamais on pourra la trouver, dépendra sans doute d'une étude approfondie des fonctions déterminantes (177) ou, ce qui revient au même, des fonctions K.

Dans ce qui précède, nous avons toujours supposé que l'équation considérée (15) ou (168) fût privée du terme en $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$. Cette hypothèse est toujours légitime puisqu'une équation quelconque peut se ramener

immédiatement à ce cas par une transformation connue; mais, pour la théorie des intégrales régulières, une telle transformation pourra introduire certaines difficultés de sorte que, dans beaucoup de cas, il sera préférable d'aborder l'étude de l'équation donnée sans aucune transformation préalable. En opérant ainsi, les déterminants infinis que l'on rencontrera ne seront plus de la forme normale, de sorte que les méthodes employées plus haut ne seront plus applicables. Il faudra, dans ce cas, se servir d'une classe plus générale de déterminants infinis, déterminants dont nous avons établi la convergence dans une note publiée aux Comptes rendus de l'Académie de Paris, le 30 janvier 1893.

NOTE ADDITIONNELLE

à l'article

SUR LES CARACTÈRES DE CONVERGENCE DES SÉRIES A TERMES POSITIFS ET SUR LES FONCTIONS INDÉFINIMENT CROISSANTES.

Je m'aperçois tardivement que certaines considérations développées dans mon article »Sur les caractères de convergence des séries à termes positifs et sur les fonctions indéfiniment croissantes».[1] en particulier au n° 15, se trouvent, sous une forme un peu différente, dans les Mémoires de Du Bois-Reymond (Math. Annalen, t. 11, 1877) et de M. Pincherle (Mem. Ac. Sc. Bologne, 4e série, t. 5, 1884). Ces Mémoires laissent d'ailleurs subsister comme m'appartenant l'application aux séries et les généralisations des n[os] 19—21.

J. HADAMARD.

---

[1] ci-dessus, pag. 319—336.

Onglet.


NAME

